ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ ВОСЕМЬ КНИГЪ,

А ИМЕННО:

Первыя шесть, одиннадцатая и двѣнадцатая,

Содержащія въ себѣ

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

Переводъ съ Греческаго

Ѳ. ПЕТРУШЕВСКАГО,

СЪ ПРИБАВЛЕНІЯМИ И ПРИМѢЧАНІЯМИ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ДЕПАРТАМЕНТА НАРОДНАГО ПРОСВѢЩЕНІЯ.

1819.

Jamais livre de science n'a eu un succès comparable à celui des Élémens d'Euclide. Ils ont été enseignés exclusivement pendant plusieurs siècles dans toutes les écoles de mathématiques, traduits et commentés dans toutes les langues; preuve certaine de leur excellence.

BOSSUT.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска изъ типографіи, представлены были: одинъ экземпляръ сей книги для Цензурнаго Комитета, другой для Департамента Народнаго Просвѣщенія; два экземпляра для Императорской Публичной Библіотеки, и одинъ для Императорской Академіи Наукъ. Санктпетербургъ, Декабря 13 дня 1818 года.

Цензоръ Ст. Сов. и Кав. Г. Яценковъ.

ВСЕПРЕСВѢТЛѢЙШЕМУ,

ДЕРЖАВНѢЙШЕМУ

ВЕЛИКОМУ ГОСУДАРЮ

ИМПЕРАТОРУ

АЛЕКСАНДРУ ПАВЛОВИЧУ,

САМОДЕРЖЦУ ВСЕРОССІЙСКОМУ,

ГОСУДАРЮ ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕМУ

Всеподданнѣйшее приношеніе.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Эвклидъ жилъ въ Александріи, почти за 270 лѣтъ до Рождества Христова, куда онъ переселился изъ Греціи по приглашенію царствовавшаго тогда въ Египтѣ Птоломея Лага, и былъ ему совѣтникомъ и сотрудникомъ въ заведеніи славной Александрійской Школы. По описанію Паппа Эвклидъ, сколь великъ умомъ, столь же отличенъ былъ и качествами сердца. Онъ, подобно великому Невтону, съ тихостію нравовъ соединялъ смиренное чувство собственнаго достоинства, былъ совершенно чуждъ гордости и предубѣжденія къ своимъ познаніямъ, съ непритворною готовностію отдавалъ справедливость достоинствамъ другихъ, и всегда оказывалъ особенное вниманіе и даже пособіе всѣмъ тѣмъ, кои какимъ либо образомъ споспѣшествовали къ распространенію Маѳематическихъ наукъ.

Изъ всѣхъ твореній Эвклида дошедшихъ до насъ славнѣйшее есть, такъ называемыя Начала (Στοιχεῖα). Оно названо просто

Началами, потому что содержитъ въ себѣ основанія, какъ Геометріи такъ и Ариѳметики, а именно изъ тринадцати главъ или книгъ, на кои онѣ раздѣляются, восемь (издаваемыя теперь) содержатъ основанія Геометріи, а остальныя, частію Ариѳметику, частію приложеніе оной къ Геометріи. Ни одна изъ классическихъ книхъ, не была столь уважаема просвѣщенными мужами, какъ Начала, или по крайней мѣрѣ восемь оныхъ книгъ. Онѣ были около девятнадцати вѣковъ почти единственнымъ руководствомъ къ изученію Геометріи, и переведены не только на всѣ Европейскіе языки, но и на многіе Азіатскіе, какъ то: на Еврейской, Арабской, Китайской и проч. Но и ни одна можетъ быть книга не потерпѣла столько, какъ Начала отъ издателей и переводчиковъ, которые по видимому старались наперерывъ одинъ передъ другимъ отступать отъ подлинника, перемѣнять самыя лучшія мѣста, которыя не могутъ быть иначе помѣщены и выражены, дополнять оныя предмѣтами ни мало не относящимися къ Началамъ, и находить ошибки, дѣйствительно существующія только въ собственныхъ ихъ понятіяхъ. Дабы въ семъ увѣриться, довольно будетъ разсмотрѣть три

перевода, кои мы уже имѣемъ. (*) Каждый изъ нихъ, а особливо послѣднїй, можетъ назваться хорошею Геометрическою книгою; но ни одинъ не можно назвать Эвклидывыми Началами; ибо въ нихъ сдѣлано столько перемѣнъ, прибавленїй, и проч., что едва оставлена тѣнь подлинника.

Настоящее изданїе есть переводъ съ подлинника напечатаннаго въ Оксфортѣ (**), кромѣ весьма не многихъ прибавленїй и поправокъ очевидныхъ онаго погрѣшностей. Все прочее оставлено неприкосновеннымъ, чтобы любителямъ Маѳематическихъ наукъ доставить удовольствїе имѣть Эвклида въ собственной такъ сказать одеждѣ, особливо же потому, что Начала сїи и донынѣ превосходятъ все, что въ семъ родѣ ни писано было, какъ по краткости, ясности и точности, такъ по содержанїю предмѣтовъ и удивительному порядку. » Тщетно старались,

---

(*) 1. Сатарова, съ Латинскаго, 1739.

2. Курганова, съ Французскаго, 1769.

3. Суворова и Никитина, съ Греческаго, 1784.

(**) Euclidis, quæ supersunt omnia, Oxoniæ, 1703.

говоритъ Монтукла, разные Геометры, коимъ не нравилось Эвклидово расположеніе, перемѣнить оное, не ослабивъ силы доказательствъ. Безсильныя ихъ покушенія доказали, сколь трудно замѣнить порядокъ симъ древнимъ Геометромъ изобрѣтенный другимъ порядкомъ столько же точнымъ. Таково было мнѣніе славнаго Лейбница, коего знаменитость въ семъ дѣлѣ должна имѣть полный вѣсъ; и Г. Вольфъ, объявляющій намъ сіе, признается, что онъ напрасно усиливался привести Геометрическія истинны въ совершеннѣйшій порядокъ, и что сего сдѣлать не возможно не предполагая того что не было еще доказано, или не ослабивъ твердости доказательствъ. Англійскіе Геометры, которые кажется болѣе другихъ соблюли вкусъ къ Геометрической точности, были всегда такого мнѣнія, и Эвклидъ имѣетъ между ими ревностныхъ защитниковъ въ разныхъ искусныхъ Геометрахъ. Въ Англіи менѣе расплодилось сего рода сочиненій, которыя облегчаютъ путь къ сей наукѣ токмо ослабляя оную. Тамъ руководствуются почти однимъ Эвклидомъ; и однакожъ тамъ всегда довольно Геометровъ.

«Упрекъ дѣлаемый Эвклиду въ несоблюденіи порядка заставляетъ меня войти въ нѣкоторыя разсужденія о томъ порядкѣ, къ коему новые Авторы Геометріи столько пристрастны, и о неудобствахъ отъ него произходящихъ. Можно ли назвать истиннымъ порядкомъ тотъ, который заставляетъ нарушать существеннѣйшую принадлежность Геометріи, я разумѣю сію строгость доказательства, которая одна токмо можетъ заставить разумъ убѣдиться отвлеченными истиннами. Между тѣмъ нѣтъ ничего обыкновеннѣе у помянутыхъ Авторовъ, какъ нарушеніе Геометрической точности. Имъ непремѣнно нужно было отступить до того, чтобы не начинать о какомъ либо родѣ протяженностей, пока не изложено будетъ о другомъ простѣйшимъ, и они любили лучше доказать въ половину, то есть вовсе не доказать, нежели нарушить мнимый порядокъ коимъ они ослѣплены. Мнѣ же кажется нѣкоторымъ родомъ ребячества та привычка, чтобы не говорить, на примѣръ, прежде о треугольникахъ, пока не будетъ все сказано о линіяхъ и объ углахъ..... Я даже не боюсь сказать еще, что сей любимый

порядокъ стѣсняетъ разумъ, и приучаетъ къ ходу противному тому, чрезъ который открываются истинны » (*).

Сіе мнѣніе знаменитаго Историка можетъ служить отвѣтомъ на всѣ возраженія противъ порядка Эвклидомъ наблюдаемаго, и доказательствомъ, что предмѣтъ Геометріи не требуетъ столь по видимому естественнаго раздѣленія на Геометрію линій, Геометрію поверхностей и Геометрію тѣлъ, ибо раздѣленіе сіе несовмѣстно съ Геометрическимъ порядкомъ, коего сущность состоитъ въ томъ, чтобъ предлагаемое ученіе выводить изъ несумнительныхъ основаній и посредствомъ умозаключеній убѣждающихъ разумъ.

Сверхъ возраженій противъ порядка Началъ вообще, есть еще нѣкоторыя противъ особенныхъ частей оныхъ. Важнѣйшія изъ нихъ суть слѣдующія:

Первое. Одиннадцатая аксіома, говорятъ, не есть аксіома, а ѳеорема, и слѣдовательно должна быть помѣщена между предложеніями, и доказана. Нельзя не согласиться, что аксіома сія тамъ, гдѣ она

(*) Histoire des Mathématiques, par J. F. Montucla, an VII, tom. I, pag. 205.

помѣщена, не столь ясна, или лучше сказать не столь убѣдительна, какъ прочія аксіомы. Но естьли замѣтимъ, что она въ первый разъ употреблена Эвклидомъ въ доказательствѣ предложенія 29, и что она послѣ 28 дѣлается почти очевидною: то сіе возраженіе перестаетъ быть важнымъ; тѣмъ паче, что сей ѳеоремы еще никто не доказалъ совершенно удовлетворительно.

Второе. Эвклидъ, говорятъ, нѣкоторымъ предложеніямъ положилъ доказательства не на всѣ случаи, каковы Кн. I, предл. 7, 24, 25, и другія. Болѣе нежели вѣроятно, что Эвклидъ зналъ всѣ случаи, но помѣстить оныхъ не хотѣлъ. Ибо для чего бы, на примѣръ, ему помѣщать вторую часть предложенія 5, гдѣ сказано: » а по продолженіи равныхъ прямыхъ и углы подъ основаніемъ взаимно равны, » естьли бы онъ не зналъ, что безъ того не можно доказать втораго случая предложенія 7? Разсматривая съ нѣкоторымъ вниманіемъ всѣ таковыя предложенія, легко видѣть, что Эвклидъ излагалъ и доказывалъ только общіе случаи, и что прочіе могутъ быть доказаны, или на основаніи оныхъ, или посредствомъ предъидущихъ предложеній; и слѣдовательно Эвклидъ

думалъ, что *въ Началахъ, доказавъ общіе случаи, нѣтъ нужды доказывать частные.* Впрочемъ, что бы сдѣлать въ семъ отношеніи настоящее изданіе полнымъ, мы помѣстили сіи случаи въ прибавленіяхъ, оставляя на волю каждаго считать оные или нужными или токмо полезными.

Третье. Ѳеорію величинъ пропорціональныхъ Эвклидомъ предлагаемую находятъ слишкомъ отвлеченною и трудною; и въ семъ заключается одна изъ важнѣйшихъ причинъ, почему Начала не имѣютъ столь обширнаго употребленія, какъ по изящности оныхъ ожидать бы должно. Изъ примѣчаній на главныя опредѣленія сей ѳеоріи (*) легко видѣть, что въ ней нѣтъ ничего слишкомъ отвлеченнаго, кромѣ, можетъ быть, опредѣленія 3, которое впрочемъ, какъ самые строгіе критики сознаются, никакого вліянія не имѣетъ на самую ѳеорію, ибо оное (опредѣленіе) даже вовсе оставить можно. Что касается до трудности, то она не раздѣльна съ самымъ предмѣтомъ: притомъ же сія трудность не такъ велика, чтобы начинающимъ преодо-

(*) Смот. стран. 433 — 438.

лѣть оную было невозможно. Какъ бы то ни было, но новѣйшіе сочинители Геометрическихъ книгъ почти всѣ оставили Эвклидову ѳеорію, и замѣнили оную Ариѳметическою, нѣкоторые частною, то есть однихъ токмо цѣлыхъ чиселъ, а нѣкоторые немногіе общею, въ коей подразумѣваются дроби и такъ называемыя несоизмѣримыя числа. Они принимаютъ, что поелику протяженности въ общихъ правилахъ сей ѳеоріи имѣютъ съ числами одинакія свойства, (что однакожъ извѣстно изъ Эвклидовой же ѳеоріи); и поелику оныя можно изобразить или предположить изображенными въ числахъ; то и поступаютъ съ ними какъ съ настоящими числами, то есть умножаютъ, дѣлятъ, возвышаютъ, и проч. Безъ сомнѣнія протяженности и числа какъ величины вообще необходимо имѣютъ одинакія свойства; но поелику Ариѳметическая ѳеорія пропорцій изслѣдываетъ свойства чиселъ, какъ чиселъ токмо, а не какъ величинъ, то заключать отъ чиселъ ко всѣмъ вообще величинамъ не значитъ ли заключать отъ частнаго къ общему, и слѣдовательно поступать противно здравой логикѣ? притомъ можно ли поступать съ протяженностями какъ съ числами, не

показавъ, какъ ихъ изображать числами? наконецъ, кто доказалъ, что всякая протяженность непремѣнно изобразится какимъ либо числомъ? Изъ сего явствуетъ, что обыкновенная то есть Ариѳметическая ѳеорія пропорцій совершенно недостаточна, ибо она нарушаетъ главнѣйшее и необходимое качество Маѳематики, точность. Сему возраженію не подлежитъ ѳеорія Гурьева; но и она уступаетъ Эвклидовой тѣмъ, что въ сей послѣдней нѣтъ раздѣленія величинъ на соизмѣримыя и несоизмѣримыя, которое влечетъ за собою длинности и трудности. Не говоря уже о томъ, что сіе раздѣленіе собственно принадлежитъ къ Ариѳметикѣ, въ коей Геометрія, какъ говоритъ и самъ Гурьевъ, не имѣетъ никакой нужды (*).

Четвертое. Упрекаютъ также Эвклида въ томъ, что доказательства его на нѣкоторыя предложенія Кн. XI и XII трудны. Правда, что оныя не такъ удобны, какъ на примѣръ, продолженія Кн. I; но сія трудность, какъ и въ ѳеоріи пропорцій, зависитъ отъ сущности предмѣта, а не отъ порядка или вида доказательства. Въ семъ

(*) Опытъ о усовершенствованіи Елементовъ Геометріи, стр. 175.

легко увѣриться, сравнивъ Эвклидовы доказательства съ обыкновенными. Первыя ясны, точны и вообще не подлежатъ никакому возраженію; напротивъ того послѣднія утверждаются на основаніяхъ, или темныхъ или вовсе несправедливыхъ. Ибо нельзя не назвать таковыми тѣ, въ коихъ допускается: что линіи состоятъ изъ точекъ, поверхности изъ линій, а тѣла изъ поверхностей; что около круга описанный многоугольникъ, имѣющій безконечно многія и безконечно малыя стороны, равенъ кругу; что паралельныя линіи въ безконечномъ разстояніи встрѣчаются, и проч. И естьли справедливо утверждаютъ Даламбертъ и Гурьевъ, что чѣмъ выводъ строже, тѣмъ онъ къ уразумѣнію удобнѣе; то должно также согласиться и въ томъ, что не Эвклидовы доказательства труднѣе обыкновенныхъ, но обыкновенныя Эвклидовыхъ.

Прочія возраженія, имѣющія какое либо основаніе, разсмотрѣны въ Прибавленіяхъ; и потому на семъ останавливаться болѣе не будемъ.

О примѣчаніяхъ и прибавленіяхъ замѣтить должно, что часть оныхъ помѣщена для пополненія и поясненія Началъ, часть дла соображенія нѣкотырыхъ мнѣній извѣстныхъ Геометровъ и толкователей

Эвклида, а часть для удобнѣйшаго уразумѣнія прочихъ древнихъ Геометровъ, а особливо Архимеда и Аполлонія; и вообще большая оныхъ часть помѣщены какъ полезныя, а не какъ нужныя. Въ числѣ ихъ не находятся нѣкоторыя предложенія относящіяся къ кругу, цилиндру, конусу и шару, потому что предполагается издать въ слѣдъ за симъ три книги Архимеда, а именно: двѣ о Шарѣ и Цилиндрѣ (*περὶ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρȣ*) и одну о Измѣреніи круга (*Κύκλȣ Μέτρησις*).

Наконецъ въ разсужденіи самаго перевода издатель считаетъ за нужное предварить читателей — Геометровъ, что онъ старался столько приближаться къ подлиннику, сколько свойство Россійскаго языка позволяло, и что посему точность выраженія и порядокъ мыслей предпочитаемы были красотѣ и плавности слога.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Точка есть то, что не имѣетъ никакой части.

2. Линія есть длина безъ ширины.

3. Концы же линіи суть точки. (1).

4. Прямая линія есть та, которая лежитъ равно своими точками. (*Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.*) (2).

5. Поверхность есть то, что только длину и ширину имѣетъ.

6. Концы же или края поверхности суть линіи. (1).

7. Плоская поверхность или плоскость есть та, которая лежитъ равно своими прямыми линіями. (3).

8. Плоскій уголъ есть взаимное наклоненіе двухъ линій, на плоскости встрѣчающихся и не впрямъ лежащихъ.

9. Когда же линіи, содержащія уголъ суть прямыя, то уголъ называется прямолинейнымъ.

10. Когда прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные: то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ; а поставленная прямая называется перпендикулярною или отвѣсною къ той, на которую поставлена.

11. Тупой уголъ есть тотъ, который больше прямаго.

12. А острый, который меньше прямаго.

13. Предѣлъ есть край или конецъ чего ни есть.

14. Фигура есть то, что содержится нѣкоторымъ или нѣкоторыми предѣлами.

15. Кругъ есть плоская фигура, содержимая одною линіею называемой окружностію, къ которой всѣ прямыя изходящія отъ одной изъ точекъ, внутрь сей фигуры лежащихъ, взаимно равны.

16. И сія точка называется центромъ или средоточіемъ круга. (4).

17. Поперечникъ же круга есть всякая прямая чрезъ центръ проведенная, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностію круга; и таковая прямая дѣлитъ кругъ пополамъ. (5).

18. Полукружіе есть плоская фигура, содержимая поперечникомъ и частію окружности, отнимаемой симъ поперечникомъ.

19. Отрѣзокъ круга есть плоская фигура, содержимая прямою линіею и частію окружности.

20. Прямолинейныя фигуры суть тѣ, кои содержатся прямыми линіями.

21. Изъ нихъ, треугольники суть тѣ, кои содержатся тремя.

22. Четыреугольники же, кои четырьмя.

23. А многоугольники, кои содержатся больше нежели четырьмя прямыми линіями.

24. Изъ треугольниковъ, равносторонный есть тотъ, который имѣетъ всѣ три стороны равныя.

25. А равнобедренный, который имѣетъ двѣ только стороны равныя.

26. Разносторонный же, который имѣетъ всѣ три стороны неравныя.

27. Сверхъ того изъ треугольниковъ же, прямоугольный есть тотъ, который имѣетъ прямой уголъ.

28. А тупоугольный, который имѣетъ тупой уголъ.

29. Остроугольный же, который имѣетъ всѣ три угла острые.

30. Изъ четыреугольниковъ, квадратъ есть тотъ, который и равносторонный и прямоугольный.

31. Продолговатый же прямоугольникъ или просто прямоугольникъ, тотъ, который есть прямоугольный, но не равносторонный.

32. А ромбъ, который есть равносторонный, но не прямоугольный.

33. И ромбоидъ, который, имѣя взаимно равными противулежащія и стороны и углы, не есть ни равносторонный, ни прямоугольный.

34. Прочія же четыресторонныя фигуры назовемъ трапеціями.

35. Параллельныя прямыя суть тѣ, кои будучи на тойже плоскости, и продолженныя на обѣ стороны безпредѣльно, нигдѣ взаимно не встрѣчаются.

« 36. Параллелограммъ есть четыреуголь-

никъ, коего противулежащія стороны взаимно параллельны.» (6)

ТРЕБОВАНІЯ.

1. Требуется чтобы можно, отъ всякой точки до всякой другой проводить прямую линію.

2. Опредѣленную прямую продолжать впрямъ непрерывно.

3. Изъ всякаго центра, всякимъ разстояніемъ, писать кругъ. (7)

АКСІОМЫ ИЛИ ОБЩІЯ ПОНЯТІЯ.

1. Равныя томуже, суть и взаимно равны.

2. Естьли къ равнымъ приложены равныя, то и цѣлыя равны.

3. Естьли отъ равныхъ отняты равныя, то и остатки равны.

4. Естьли къ неравнымъ приложены равныя, то и цѣлыя неравны.

5. Естьли отъ неравныхъ отняты равныя, то и остатки неравны.

6. Двукратныя тогоже, суть взаимно равны.

7. Половины тогоже, суть взаимно равны.

8. Совмѣщающіяся взаимно, суть взаимно равны.

9. Цѣлое больше своей части.

10. Всѣ прямые углы взаимно равны. (8)

11. Естьли на двѣ прямыя падаетъ третья прямая, и дѣлаетъ углы внутренные и по туже сторону меньше двухъ прямыхъ; то оныя двѣ прямыя линїи, продолженныя безпредѣльно, взаимно встрѣтятся по ту сторону, по которую углы меньше двухъ прямыхъ.

12. Двѣ прямыя не заключаютъ пространства.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

На данной опредѣленной прямой, составить равносторонный треугольникъ.

Пусть будетъ AB данная опредѣленная прямая. Надлежитъ на опредѣленной прямой AB составить равносторонный треугольникъ.

Изъ центра A, разстоянїемъ AB, напиши
пр.3. кругъ BCD; и еще изъ центра B, разстоянїемъ BA, напиши кругъ ACE; и отъ точки C, въ которой круги взаимно пересѣкаются, къ точкамъ A, B протяни пря-
пр.1. мыя CA, CB.

Поелику точка A есть центръ круга
опр.18. BCD, то AC равна AB; еще же, поелику

точка B есть центръ круга ACE, то BC равна BA. А доказано, что и CA равна AB, посему каждая изъ прямыхъ CA, CB равна AB. Но равныя тому же, суть и взаимно равны*; по сему и CA равна CB. Чего ради три CA, AB, BC взаимно равны. *акс. 1.

Итакъ треугольникъ ABC есть равносторонный*, и составленъ на данной опредѣленной прямой AB. Что и сдѣлать надлежало. *опр. 24.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Приданной точкѣ положить прямую равную данной прямой.

Пусть будетъ A данная точка, и BC данная прямая. Надлежитъ при точкѣ A положить прямую равную прямой BC.

Протяни отъ точки A до точки B прямую AB*, и составь на ней равносторонный треугольникъ DAB*; и впрямъ съ DA, DB продолжи прямыя AE, BF*; изъ центра B, разстояніемъ BC, напиши кругъ CGH*; и еще изъ центра D, разстояніемъ DG, напиши кругъ GKL. *пр. 1. *пр. 1. *пр. 2. *пр. 3.

Поелику точка B есть центръ круга CGH, то BC равна BG*. Еще же, поелику точка *опр. 15.

D есть центръ круга GKL, то DL равна DG: но въ нихъ DA равна DB; посему
акс.3. остальная AL равна остальной BG. А доказано, что и BC равна BG; посему каждая изъ прямыхъ AL, BC равна BG. Но равныя
акс.1. томуже, суть и взаимно равны; посему AL равна BC.

Итакъ при данной точкѣ A положена прямая AL равная данной прямой BC. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Изъ двухъ данныхъ прямыхъ неравныхъ, отъ большей отнять прямую равную меньшей.

Пусть будутъ AB, C двѣ данныя прямыя неравныя, изъ коихъ AB пусть будетъ большая. Надлежитъ отъ большой AB отнять прямую равную меньшей C.

При точкѣ A положи прямую AD равную
пр.2. C; и изъ центра A, разстояніемъ AD, на-
пр.3. пиши кругъ DEF.

Поелику точка A есть центръ круга
опр.15. DEF, то AE равна AD; но и C равна AD: чего ради каждая изъ прямыхъ AE, C равна AD; слѣдственно и AE равна C.

Итакъ, изъ двухъ данныхъ прямыхъ неравныхъ AB, C, отъ большей AB отнята прямая AE равная меньшей C. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; и одинъ уголъ равный одному углу, а именно, кои содержатся сими равными прямыми; то и основаніе будутъ имѣть равное основанію; и треугольникъ будетъ равенъ треугольнику; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющіе двѣ стороны AB, AC равныя двумъ сторонамъ DE, DF, каждую каждой, а именно, AB равную DE, а AC равную DF; и уголъ BAC равный углу EDF. Говорю, что и основаніе BC равно основанію EF; и треугольникъ ABC будетъ равенъ треугольнику DEF; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ, а именно, уголъ ABC углу DEF, а уголъ ACB углу DFE.

Ибо, естьли помѣстить треугольникъ

ABC на треугольникъ DEF; и положить точку A на точку D, а прямую AB на прямую DE: то и точка B совмѣстится съ точкою E, поелику AB равна DE. Когда же AB совмѣстилась съ DE, то и прямая AC совмѣстится съ прямою DF, поелику уголъ BAC равенъ углу EDF: слѣдственно и точка C совмѣстится съ точкою F, поелику еще AC равна DF. Но и B совмѣстилась съ E; слѣдственно основанїе BC совмѣстится съ основанїемъ EF. А буде, по совмѣсченїи B съ E а C съ F, основанїе BC не совмѣстится съ основанїемъ EF: то двѣ прямыя за-
акс. 12. ключатъ пространство, что не возможно*. Чего ради основанїе BC совмѣстится съ
акс. 8. основанїемъ EF, и будетъ равно ему*; слѣдственно и цѣлый треугольникъ ABC совмѣстится съ цѣлымъ треугольникомъ DEF и будетъ ему равенъ; и прочїе углы совмѣстятся съ прочими углами и будутъ равны имъ, а именно, уголъ ABC углу DEF, и уголъ ACB углу DFE.

Итакъ, ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; и одинъ уголъ равный одному углу, а именно, кои содержатся сими равными прямыми: то и основанїе будутъ имѣть

равное основанію; и треугольникъ будетъ равенъ треугольнику; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ. Что и доказать надлежало.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Равнобедренныхъ треугольниковъ углы при основаніи взаимно равны; и естьли продолжить равныя прямыя, то и углы подъ основаніемъ взаимно равны.

Пусть будетъ ABC равнобедренный треугольникъ, имѣющій сторону AB равную сторонѣ AC; и пусть впрямъ съ AB, AC будутъ продолжены прямыя BD, CE*. Говорю, *пр. 2.
что уголъ ABC равенъ углу ACB, а уголъ CBD углу BCE.

Возьми на BD какую ниесть точку F; и отъ большей AE отними прямую AG равную меньшей AF*; и протяни прямыя FC, GB. *3.

Поелику AF равна AG, а AC равна AB; то двѣ прямыя FA, AC равны двумъ прямымъ GA, AB, каждая каждой, и содержатъ онѣ уголъ FAG общій: посему* основаніе FC *4.
равно основанію GB; и треугольникъ AFC будетъ равенъ треугольнику AGB; и прочіе

углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ, а именно, уголъ ACF углу ABG, а уголъ AFC углу AGB. И поелику цѣлая AF равна цѣлой AG; и въ нихъ AB равна AC: посему остальная BF равна остальной
акс.3. CG. А доказано, что и FC равна GB; посему двѣ прямыя BF, FC равны двумъ прямымъ CG, GB, каждая каждой; и уголъ BFC равенъ углу CGB; а основанїе ихъ общее BC: чего ради и треугольникъ BFC будетъ равенъ треугольнику CGB; и прочїе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ; посему уголъ FBC равенъ углу GCB, а уголъ BCF углу CBG. Поелику же цѣлый уголъ ACF, по доказанному равенъ углу ABG; и въ нихъ уголъ BCF равенъ углу CBG: посему остальной
акс.3. уголъ ACB равенъ остальному ABC; и они при основанїи треугольника ABC. А доказано, что и уголъ FBC равенъ углу GCB; и они суть подъ основанїемъ:

Итакъ равнобедренныхъ треугольниковъ, и проч. ч. и д. н. (9).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели треугольника два угла взаимно равны; то и равнымъ угламъ противу-

лежащія стороны будутъ взаимно равны.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій уголъ BCA равный углу CBA. Говорю, что и сторона AC равна сторонѣ AB.

Ибо, буде AB не равна AC; то одна изъ нихъ большая. Пусть будетъ AB большая. Отъ большей AB отними BD равную меньшей AC*; и протяни DC. *3.

Поелику DB равна AC, а BC общая; то двѣ прямыя DB, BC равны двумъ прямымъ AC, CB, каждая каждой; и уголъ DBC равенъ углу ACB: посему* основаніе DC равно основанію AB; и треугольникъ ABC будетъ равенъ треугольнику DCB, меньшему большій, что нелѣпо. Чего ради AB не будетъ неравна AC; слѣдственно равна. *4.

Итакъ, ежели треугольника, и проч. ч. и д. н. (10).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

На тойже прямой, отъ двухъ различныхъ по туже сторону лежащихъ точекъ, не могутъ быть составлены двумъ прямымъ другія двѣ прямыя равныя, каждая каждой, и окончивающіяся вмѣстѣ съ первыми прямыми.

Ибо, буде возможно, пусть на тойже прямой AB, отъ двухъ различныхъ по туже сторону лежащихъ точекъ C и D, будутъ составлены двумъ прямымъ AC, CB другія двѣ прямыя AD, DB равныя, каждая каждой, и оканчивающіяся въ A, B вмѣстѣ съ первыми прямыми: такъ что CA будетъ равна DA, оканчиваясь вмѣстѣ съ нею въ точкѣ A, а CB равна DB оканчиваясь вмѣстѣ съ нею въ точкѣ B; и протяни CD.

Поелику AC равна AD; то уголъ ACD
5. равенъ углу ADC: посему уголъ ADC больше
акс.3. угла DCB; а посему уголъ CDB гораздо больше угла DCB. Еще же, поелику CB равна DB; то уголъ CDB равенъ углу DCB: а по доказанному гораздо больше; что невозможно. (11)

Итакъ на тойже прямой, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой, и основаніе равное основанію: то и уголъ будутъ имѣть равный углу, а именно, кои содержатся тѣми равными прямыми.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющіе двѣ стороны AB, AC равныя

двумъ сторонамъ DE, DF, каждую каждой, а именно, AB равную DE, а AC равную DF; и основанїе BC равное основанїю EF. Говорю, что и уголъ BAC равенъ углу EDF.

Ибо, естьли помѣстить треугольникъ ABC на треугольникъ DEF; и положить точку B на точку E, а прямую BC на прямую EF: то точка C совмѣстится съ точкою F, поелику BC равна EF. Когда же BC совмѣстилась съ EF; то и прямыя BA, AC совмѣстятся съ прямыми ED, DF. А буде, по совмѣщенїи основанїя BC съ основанїемъ EF, стороны BA, AC не совмѣстятся съ сторонами ED, DF, но примутъ другое положенїе, какъ EG, GF: то будутъ составлены на тойже прямой, отъ двухъ различныхъ по туже сторону лежащихъ точекъ, двумъ прямымъ другїя двѣ прямыя равныя, каждая каждой, и оканчивающїяся вмѣстѣ съ первыми прямыми. Но онѣ не могутъ быть составлены*: посему, когда *7.
основанїе BC совмѣстилось съ основанїемъ EF, не могутъ не совмѣстится стороны BA, AC съ сторонами ED, DF: слѣдственно совмѣстятся. Чего ради и уголъ BAC совмѣстится съ угломъ EDF и будетъ равенъ ему*.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Данный прямолинейный уголъ раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ BAC данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ сей уголъ раздѣлить по поламъ.

Возьми на AB какую ниесть точку D; и
3. отъ AC отними прямую AE равную AD; и протяни DE; и составь на DE равносторон-
1. ный треугольникъ DEF; и протяни AF. Говорю, что уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AF.

Поелику AD равна AE, а AF общая; то двѣ прямыя DA, AF равны двумъ прямымъ EA, AF, каждая каждой; и основаніе DF равно основанію EF: посему уголъ DAF ра-
8. венъ углу EAF.

Итакъ данный прямолинейный уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AF. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Данную опредѣленную прямую раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ AB данная опредѣленная прямая. Надлежитъ прямую AB раздѣлить по поламъ.

Составь на ней равносторонный треугольникъ ABC*; и раздѣли уголъ ACB по поламъ прямою CD*. Говорю, что прямая AB раздѣлена по поламъ въ точкѣ D. *1. *9.

Поелику AC равна CB, а CD общая; то двѣ прямыя AC, CD равны двумъ прямымъ BC, CD, каждая каждой; и уголъ ACD равенъ углу BCD: посему основанїе AD равно основанїю BD*. *4.

Итакъ данная опредѣленная прямая AB раздѣлена по поламъ въ точкѣ D. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Къ данной прямой, отъ данной на ней точки, провести подъ прямыми углами прямую линїю.

Пусть будетъ AB данная прямая, а C данная на ней точка. Надлежитъ отъ точки C прямой AB, провести подъ прямыми къ ней углами, прямую линїю.

Возьми на AC какую ниесть точку D; и положи прямую CE равную CD*; и составь на DE равносторонный треугольникъ FDE*; и протяни FC. Говорю, что къ данной *3. *1.

прямой AB, отъ данной на ней точки C, проведена подъ прямыми углами прямая линія CF.

Поелику CD равна CE, а CF общая; то двѣ прямыя DC, CF равны двумъ прямымъ EC, CF, каждая каждой; и основаніе DF равно основанію EF: по сему уголъ DCF равенъ
8. углу ECF; и они суть смѣжные. Когда же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется
опр. 10. прямымъ: посему каждый изъ угловъ DCF, ECF есть прямой.

Итакъ, къ данной прямой AB, отъ данной на ней точки C, проведена подъ прямыми углами прямая линія FC. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Къ данной неопредѣленной прямой, отъ данной внѣ ея точки, провести перпендикулярную прямую линію.

Пусть будетъ AB данная неопредѣленная прямая, а C данная внѣ ея точка. Надлежитъ къ данной неопредѣленной прямой AB, отъ данной внѣ ея точки C, провести перпендикулярную прямую линію.

Возьми, по другую сторону прямой AB, какую ниесть точку D; и изъ центра C, разстоянїемъ CD, напиши кругъ EFC*; и раздѣли прямую EG по поламъ въ точкѣ H*; и протяни CG, CH, CE. Говорю, что къ данной неопредѣленной прямой AB, отъ данной внѣ ея точки C, проведена перпендикулярная CH. *пр. 3. *10.

Поелику GH равна HE, а HC общая; то двѣ прямыя GH, HC равны двумъ прямымъ HE, HC, каждая каждой; и основанїе CG равно основанїю CE: посему уголъ CHG равенъ углу EHC*; и они суть смѣжные. Когда же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ, а поставленная прямая называется перпендикулярною къ той на которую поставлена*: *8. *опр. 10.

Итакъ на данную неопредѣленную прямую AB, отъ данной внѣ ея точки C, проведена перпендикулярная CH. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Какъ бы прямая, на прямую поставленная, углы ни дѣлала; она сдѣлаетъ или два прямые, или равные двумъ прямымъ.

Пусть прямая AB, на прямую CD поставленная, дѣлаетъ углы CBA, ABD. Говорю, что углы CBA, ABD или суть два прямые, или равны двумъ прямымъ.

Ибо, естьли уголъ CBA равенъ углу
опр. 10. ABD; то они суть прямые. Естьли же нѣтъ; то проведи отъ точки B, подъ
11. прямыми углами къ CD, прямую BE. Посему углы CBE, EBD суть два прямые. И поелику уголъ CBE равенъ двумъ угламъ CBA, ABE; придай обще уголъ EBD: посему углы CBE,
акс. 2. EBD равны тремъ CBA, ABE, EBD. Еще же, поелику уголъ ABD равенъ двумъ угламъ ABE, EBD; придай обще уголъ ABC: посему углы CBA, ABD равны тремъ CBA, ABE, EBD. А доказано, что и углы CBE, EBD равны тѣмъ же тремъ угламъ; а равныя томуже
акс. 1. суть и взаимно равны: посему углы CBA, ABD равны угламъ CBE, EBD. Но углы CBE, EBD суть два прямые: чего ради углы CBA, ABD равны двумъ прямымъ.

Итакъ, какъ бы прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Ежели при какой ниесть прямой, и при точкѣ на ней, двѣ прямыя, не лежащія по

туже сторону, дѣлаютъ смѣжные углы равные двумъ прямымъ; то сіи двѣ прямыя будутъ взаимно впрямъ.

Пусть при какой ниесть прямой AB, и при точкѣ на ней B, двѣ прямыя BC, BD, не лежащія по туже сторону, дѣлаютъ смѣжные углы ABC, ABD равные двумъ прямымъ. Говорю, что BD впрямъ съ CB.

Ибо, буде BD не впрямъ съ BC; то пусть BE будетъ впрямъ съ BC.

Поелику прямая AB поставлена на прямую CBE; то углы CBA, ABE равны двумъ прямымъ*. Но и углы CBA, ABD равны *13.
двумъ прямымъ; посему углы CBA, ABE равны угламъ CBA, ABD. Отними обще уголъ CBA; посему остальной уголъ ABE равенъ остальному ABD, меньшій большему; что невозможно. Чего ради BE не впрямъ съ BC. Подобно докажемъ, что ни другая какая ниесть прямая, кромѣ BD: посему BD есть впрямъ съ BC.

Итакъ, ежели при какой ниесть, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Ежели двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то сдѣлаютъ противуположные углы взаимно равные.

Пусть двѣ прямыя AB, CD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E. Говорю, что уголъ AEC равенъ углу DEB, а уголъ CEB углу AED.

Поелику прямая AE, поставленная на прямую CD, дѣлаетъ углы CEA, AED; то
13. углы CEA, AED равны двумъ прямымъ. Еще же, поелику прямая DE, поставленная на прямую AB, дѣлаетъ углы AED, DEB; то углы AED, DEB равны двумъ прямымъ. А доказано, что и углы CEA, AED равны двумъ прямымъ; посему углы CEA, AED
акс. 1. и 10. равны угламъ AED, DEB. Отними обще уголъ AED; посему остальной уголъ CEA
акс. 2. равенъ остальному DEB. Подобно докажется, что и уголъ AED равенъ углу CEB.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Откуда явствуетъ, что естьли сколько ниесть прямыхъ взаимно пресѣкутся; то сдѣлаютъ около сѣченія углы равные четыремъ прямымъ. (12).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Всякаго треугольника, ежели одна изъ сторонъ продолжена, внѣшный уголъ больше каждаго изъ внутренныхъ противулежащихъ угловъ.

Пусть будетъ ABC треугольникъ; и пусть будетъ продолжена одна его сторона BC къ D. Говорю, что внѣшный уголъ ACD больше каждаго изъ внутренныхъ противулежащихъ угловъ BAC, CBA.

Раздѣли AC по поламъ въ E*; и протянувъ BE продолжи оную къ F; и положи прямую EF равную BE*; и протяни FC; и продолжи AC къ G. *10 *3.

Поелику AE равна EC, а BE равна EF; то двѣ прямыя AE, EB равны двумъ прямымъ CE, EF, каждая каждой; и уголъ BEA равенъ углу CEF, ибо суть противуположные*: посему* основаніе AB равно основанію FC; и треугольникъ ABE равенъ треугольнику FEC; и прочіе углы равны прочимъ угламъ каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ; посему уголъ BAE равенъ углу ECF. Но уголъ ECD больше угла ECF; посему уголъ ACD больше угла BAE. Подобно же, раздѣливъ BC по поламъ, докажется, что *15. *4.

и уголъ BCG, то есть ACD больше и угла CBA.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Всякаго треугольника два угла, всячески перебранные, меньше двухъ прямыхъ.

Пусть будетъ ABC треугольникъ. Говорю, что треугольника ABC, два угла всячески перебранные, меньше двухъ прямыхъ.

Продолжи BC къ D.

Поелику треугольника ABC уголъ ACD есть внѣшный; то онъ больше внутрен-
16. наго противулежащаго угла ABC. Придай обще уголъ ACB; посему углы ACD, ACB
акс. 4. больше угловъ ABC, BCA. Но углы ACD,
13. ACB равны двумъ прямымъ; посему углы ABC, BCA меньше двухъ прямыхъ. Подобно докажемъ, что и углы BAC, ACB меньше двухъ прямыхъ; и также углы CAB, ABC.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Всякаго треугольника большая сторона противулежитъ большему углу.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій сторону AC больше стороны AB.

Говорю, что и уголъ ABC больше угла BCA.

Поелику AC больше AB; то положи AD равную AB*; и протяни BD. *3.

И поелику треугольника BDC уголъ ADB есть внѣшный; то онъ больше внутренняго противулежащаго угла DCB*. А уголъ *16.
ADB равенъ углу ABD*, ибо сторона AB *5.
равна сторонѣ AD; посему и уголъ ABD больше угла ACB: чего ради уголъ ABC гораздо больше угла ACB.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Всякаго треугольника большему углу противулежитъ большая сторона.

Пусть будетъ ABC треугольникъ, имѣющій уголъ ABC больше угла BCA. Говорю, что и сторона AC больше стороны AB.

Ибо, буде не такъ; то AC или равна AB, или меньше ея. Но AC не равна AB; ибо уголъ ABC былъ бы равенъ углу BCA*: а *5.
онъ не равенъ; посему AC не равна AB. И AC не меньше AB; ибо уголъ ABC былъ бы меньше угла BCA*: а онъ не меньше; посему *18.
AC не меньше AB. А доказано, что и ни равна: чего ради AC больше AB.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Всякаго треугольника двѣ стороны, всячески перебранныя, больше остальной.

Пусть будетъ ABC треугольникъ. Говорю, что треугольника ABC двѣ стороны, всячески перебранныя, больше остальной: а именно, BA, AC больше BC; а AB, BC больше AC; и BC, CA больше AB.

Продолжи BA къ точкѣ D; и положи AD равную AC; и протяни DC.

Поелику DA равна AC; то уголъ ADC
5. равенъ углу ACD: но уголъ BCD больше
акс.9. угла ACD; посему уголъ BCD больше и угла ADC. И поелику BDC есть треугольникъ, имѣющій уголъ BCD большій угла CDB; а большему углу противулежитъ
19. большая сторона: посему DB больше BC. Но DB равна AB, AC: чего ради BA, AC больше BC. Подобно докажемъ, что и AB, BC больше CA; а BC, CA больше AB.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели на одной изъ сторонъ треугольника, отъ концовъ ея, будутъ составле-

ны внутри его двѣ прямыя: то составленныя прямыя будутъ меньше прочихъ двухъ сторонъ треугольника, но большїй уголъ содержать будутъ.

Треугольника ABC на одной изъ сторонъ BC, пусть отъ концовъ ея B, C, будутъ составлены внутри его двѣ прямыя BD, DC. Говорю, что BD, DC суть меньше прочихъ треугольника двухъ сторонъ BA, AC; но содержатъ уголъ BDC большїй угла BAC.

Продолжи BD къ E.

Поелику всякаго треугольника двѣ стороны больше остальной*; то треугольника *20.
ABE двѣ стороны AB, AE больше BE. Придай обще EC; посему BA, AC больше BE, EC*. *акс. 4.
Ещеже, поелику треугольника CED двѣ стороны CE, ED больше CD; придай обще DB: посему CE, EB больше CD, DB. А доказано, что BA, AC больше самихъ BE, EC; чего ради BA AC гораздо больше BD, DC.

Ещеже, поелику всякаго треугольника внѣшный уголъ больше внутреннаго противулежащаго*; то треугольника CDE внѣшный *16.
уголъ BDC больше угла CED. Потому же и треугольника ABE внѣшный уголъ CEB больше угла BAC. А доказано, что уголъ

BDC больше угла CEB: чего ради уголъ BDC гораздо больше угла BAC.

Итакъ, ежели на одной, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Изъ трехъ прямыхъ, равныхъ тремъ даннымъ прямымъ, составить треугольникъ. Но надлежитъ двумъ изъ тѣхъ прямыхъ, всячески перебранныхъ, быть больше остальной.

Пусть будутъ A, B, C данныя три прямыя, изъ коихъ двѣ, всячески перебранныя, пусть будутъ больше остальной: а именно, A, B больше C; а A, C больше B; и еще B, C больше A. Надлежитъ изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ A, B, C, составить треугольникъ.

Изложи какую ниесть прямую DE, опредѣленную при D, но неопредѣленную при E; положи прямую DF равную A, прямую FG равную B, и прямую GH равную C; изъ центра F, разстояніемъ FD, напиши кругъ DKL; и еще изъ центра G, разстояніемъ GH, напиши кругъ KLH; и протяни KF, KG. Говорю, что изъ трехъ прямыхъ, равныхъ прямымъ A, B, C, составленъ треугольникъ KFG.

Поелику точка F есть центръ круга DKL; то FK равна FD*: но и A равна FD; посему *опр. 15.
FK равна A. Ещеже, поелику точка G есть центръ круга LKH; то GK равна GH: но и C равна GH; посему GK равна C. А FG равна B: чего ради три прямыя KF, FG, GK равны тремъ A, B, C.

Итакъ, изъ трехъ прямыхъ KF, FG, GK, равныхъ даннымъ прямымъ A, B, C, составленъ треугольникъ KFG. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

При данной прямой, и при данной на ней точкѣ, составить прямолинейный уголъ, равный данному прямолинейному углу.

Пусть будутъ AB данная прямая, и A данная на ней точка, и DCE данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ при прямой AB, и при точкѣ на ней A, составить прямолинейный уголъ, равный данному прямолинейному углу DCE.

Возьми на каждой изъ прямыхъ CD, CE какія ниесть точки D, E; и протяни DE; и изъ трехъ прямыхъ, равныхъ тремъ прямымъ CD, DE, CE, составь треугольникъ AFG*, *22.
такъ чтобъ CD была равна AF, а CE равна AG, и DE равна FG.

Поелику двѣ прямыя DC, CE равны двумъ прямымъ FA, AG, каждая каждой; и основанїе DE равно основанїю FG: то уголъ DCE
8. равенъ углу FAG.

Итакъ, при данной прямой AB, и при данной на ней точкѣ A, составленъ прямолинейный уголъ FAG, равный данному прямолинейному углу DCE. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; а уголъ одного больше угла другаго, а именно, кои содержатся сими равными прямыми: то и основанїе одного будетъ больше основанїя другаго.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющїе двѣ стороны AB, AC равныя двумъ сторонамъ DE, DF, каждую каждой; а именно, AB равную DE, а AC равную DF; а уголъ BAC больше угла EDF. Говорю, что и основанїе BC больше основанїя EF.

Поелику уголъ BAC больше угла EDF: то составь при прямой DE, и при точкѣ на
23. ней D, уголъ EDG равный углу BAC; и положи равную которой ни есть изъ прямыхъ
3. AC, DF прямую DG; и протяни GE, FG.

Поелику AB равна DE, и AC равна DG; то двѣ прямыя BA, AC равны двумъ прямымъ ED, DG, каждая каждой; и уголъ BAC равенъ углу EDG: посему основанїе BC равно основанїю EG*. Еще же, поелику DF равна *4.
DG; то уголъ DFG равенъ углу DGF*: по- *5.
сему уголъ DFG больше угла EGF; а уголъ EFG и гораздо больше угла EGF. И поелику треугольника EFG уголъ EFG больше угла EGF; а большаму углу противулежитъ большая сторона*: посему сторона EG больше *19.
стороны EF. Но EG равна BC; чего ради и BC больше EF.

Итакъ, ежели двѣ стороны, и проч. ч. и д. н. (15).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели два треугольника имѣютъ двѣ стороны равныя двумъ сторонамъ, каждую каждой; а основанїе одного больше основанїя другаго: то и уголъ одного будетъ больше угла другаго, а именно, кои содержатся тѣми равными прямыми.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющїе двѣ стороны AB, AC равныя двумъ сторонамъ DE, DF, каждую каждой; а именно, AB равную DE, а AC равную

DF; а основанїе BC пусть будетъ больше основанія EF. Говорю, что и уголъ BAC больше угла EDF.

Ибо, буде не такъ; то онъ или равенъ ему, или меньше. Но уголъ BAC не равенъ углу EDF; ибо основанїе BC было бы равно
4. основанїю EF: а оно не равно; посему уголъ BAC не равенъ углу EDF. И не меньше его; ибо основанїе BC было бы меньше основанїя
24. EF: а оно не меньше; посему уголъ BAC ни меньше угла EDF. Доказано же, что и ни равенъ: чего ради уголъ BAC больше угла EDF.

Итакъ, ежели двѣ стороны, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Ежели два треугольника имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, а именно, кои прилежатъ равнымъ угламъ, или коимъ противулежатъ равные углы: то и прочїя стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; и остальной уголъ равный остальному углу.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющїе два угла ABC, BCA равные двумъ угламъ DEF, EFD, каждый каждому;

а именно, уголъ ABC равный углу DEF, а уголъ BCA углу EFD; и одну сторону пусть имѣютъ равную одной сторонѣ: и во первыхъ, кои прилежатъ равнымъ угламъ, то есть, сторону BC равную EF. Говорю, что и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой, а именно, AB равную DE, а AC равную DF, и остальной уголъ BAC равный остальному углу EDF.

Ибо, буде AB не равна DE; то одна изъ нихъ большая. Пусть будетъ AB большая. Положи прямую BG равную DE*; и протяни GC. *3.

Поелику BG равна DE, а BC равна EF; то двѣ прямыя BG, BC равны двумъ прямымъ DE, EF, каждая каждой; и уголъ GBC равенъ углу DEF: посему* основаніе GC равно основанію DF; и треугольникъ GBC равенъ треугольнику DEF; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ, а посему уголъ GCB равенъ углу DFE. *4.
Но, по положенію, уголъ DFE равенъ углу BCA: посему и уголъ BCG равенъ углу BCA, меньшій большему; что невозможно. Чего ради AB не неравна DE; слѣдственно равна:

Но и BC равна EF; посему двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF, каждая каждой; и уголъ ABC равенъ углу DEF: а
4. посему основанїе AC равно основанїю DF; и остальной уголъ BAC равенъ остальному EDF.

Но еще пусть будутъ стороны, противулежащїя равнымъ угламъ, равныя; а именно, пусть будетъ AB равна DE. Говорю еще, что и прочїя стороны будутъ равны прочимъ сторонамъ, каждая каждой, а именно, AC равна DF, а BC равна EF; и остальной уголъ BAC будетъ равенъ остальному углу EDF.

Ибо, буде BC не равна EF; то одна изъ нихъ большая. Пусть, буде возможно, BC будетъ большая. Положи прямую BH равную EF*; и протяни AH.
*3.

Поелику BH равна EF, а AB равна DE; то двѣ прямыя AB, BH равны двумъ прямымъ DE, EF, каждая каждой; и содержатъ равные
4. углы: посему основанїе AH равно основанїю DF; и треугольникъ ABH равенъ треугольнику DEF; и прочїе углы равны будутъ прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ; а посему уголъ BHA равенъ углу EFD. Но уголъ EFD

равенъ углу BCA: посему и уголъ BHA равенъ углу BCA; то есть, треугольника AHC уголъ внѣшный BHA равенъ внутреннему противулежащему BCA; что невозможно*. Чего ради *16.
BC не неравна EF; слѣдственно равна: Но и AB равна DE; посему двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF, каждая каждой; и содержатъ равные углы: а посему* *4.
основанїе AC равно основанїю DF; и треугольникъ ABC равенъ треугольнику DEF; и остальной уголъ BAC равенъ остальному EDF.

Итакъ, ежели два угла, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Ежели на двѣ прямыя падаетъ третья прямая и дѣлаетъ накось лежащїе углы взаимно равные; то оныя прямыя будутъ параллельны.

Пусть на двѣ прямыя AB, CD падаетъ третья прямая EF, и дѣлаетъ накось лежащїе углы AEF, EFD взаимно равные. Говорю, что прямая AB параллельна къ CD.

Ибо, буде не такъ; то AB, CD продолженныя встрѣтятся, или по ту сторону гдѣ BD, или по ту сторону гдѣ AC. Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся по ту сторону гдѣ BD, въ точкѣ G.

Треугольника GEF внѣшный уголъ AEF
16. больше внутреннаго противулежащаго EFG:
но и равенъ ему; что невозможно. Посему
AB, CD, продолженныя, не встрѣтятся по
ту сторону, гдѣ BD. Подобно докажется,
что и ни по ту сторону, гдѣ AC. А ни по
которую сторону не встрѣчающіяся прямыя
опр.35. суть параллельныя: чего ради AB параллель-
на къ CD.

Итакъ, ежели на двѣ прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Ежели на двѣ прямыя падаетъ третья прямая и дѣлаетъ внѣшный уголъ равный внутреннему противулежащему и по туже сторону; или дѣлаетъ внутренные углы и по туже сторону, равные двумъ прямымъ: то оныя прямыя будутъ взаимно параллельны.

Пусть на двѣ прямыя AB, CD падаетъ третья прямая EF, и дѣлаетъ внѣшный уголъ EGB равный внутреннему противулежащему и по туже сторону углу GHD; или пусть дѣлаетъ внутренные, и по туже сторону, углы BGH, GHD равные двумъ прямымъ. Говорю, что AB параллельна къ CD.

Поелику уголъ EGB равенъ углу GHD; но
15. уголъ BGE равенъ и углу AGH: по сему уголъ

AGH равенъ углу GHD; и они суть накось лежащїе: чего ради прямая AB параллельна къ CD*. *27.

Еще же, поелику углы BGH, GHD равны двумъ прямымъ; а и углы AGH, BGH равны двумъ прямымъ*: по сему углы AGH, BGH *13. равны угламъ BGH, GHD. Отними обще уголъ BGH; посему остальной уголъ AGH равенъ остальному GHD; и они суть накось лежащїе. Чего ради прямая AB параллельна къ CD*. *27.

Итакъ, ежели на двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Ежели на параллельныя прямыя падаетъ прямая: то она дѣлаетъ накось лежащїе углы взаимно равные; и внѣшный уголъ равный внутреннему противулежащему и по туже сторону; и внутренные углы и по туже сторону равные двумъ прямымъ.

Пусть на параллельныя прямыя AB, CD падаетъ прямая EF. Говорю, что она дѣлаетъ накось лежащїе углы AGH, GHD взаимно равные; и внѣшный уголъ BGE равный внутреннему противулежащему, и по туже сторону, углу GHD; и внутренные и по туже сторону, углы BGH, GHD равные двумъ прямымъ.

Ибо, буде уголъ AGH не равенъ углу GHD; то одинъ изъ нихъ большій. Пусть будетъ AGH большій.

И поелику уголъ AGH большеугла GHD; придай обще уголъ BGH: посему углы AGH, BGH больше угловъ BGH, GHD. Но углы
13. AGH, BGH равны двумъ прямымъ; посему углы BGH, GHD меньше двухъ прямыхъ. А прямыя, неопредѣленно продолженныя со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ,
акс. 11. встрѣчаются; посему прямыя AB, CD, неопредѣленно продолженныя встрѣтятся. Но онѣ не встрѣчаются; ибо предполагаются параллельными: чего ради уголъ AGH не неравенъ углу GHD; слѣдственно равенъ.

15. Но уголъ AGH равенъ углу EGB; чего ради уголъ EGB равенъ углу GHD.

Придай обще уголъ BGH; по сему углы EGB, BGH равны угламъ BGH, GHD. Но
13. углы EGB, BGH равны двумъ прямымъ; чего ради и углы BGH, GHD равны двумъ прямымъ.

Итакъ, ежели на параллельныя, и проч. ч. и д. н. (16).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Прямыя, параллельныя къ тойже прямой, суть и взаимно параллельны.

Пусть будетъ каждая изъ прямыхъ AB, CD параллельна къ прямой EF. Говорю, что и AB параллельна къ CD.

Ибо, пусть на оныя прямыя, падаетъ прямая GK.

Поелику на параллельныя прямыя AB, EF падаетъ прямая GK; то уголъ AGH равенъ углу GHF*. Еще же, поелику на параллельныя прямыя EF, CD падаетъ прямая GK; то уголъ GHF равенъ углу GKD*. А доказано, что уголъ AGK равенъ углу GHF: посему уголъ AGK равенъ углу GKD; и они суть накось лежащіе. Чего ради прямая AB параллельна къ CD*.

*29.
*29.
*27.

Итакъ прямыя параллельныя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Чрезъ данную точку провести прямую, параллельную къ данной прямой.

Пусть будетъ A данная точка, а BC данная прямая. Надлежитъ чрезъ точку A провести прямую, параллельную къ прямой BC.

Возьми на BC какую ниесть точку D, и протяни AD; и при прямой AD, и при точкѣ на ней A, составь уголъ DAE равный углу ADC*; и продолжи впрямъ съ EA прямую AF.

*23.

Поелику на двѣ прямыя BC, EF, падаетъ третья прямая AD, и дѣлаетъ накось лежащіе углы EAD, ADC взаимно равные; то EF
27. параллельна къ BC.

Итакъ чрезъ данную точку A проведена прямая EAF, параллельная къ данной прямой BC. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Всякаго треугольника, ежели одна изъ сторонъ продолжена, внѣшный уголъ равенъ двумъ внутреннымъ противулежащимъ. И три угла треугольника внутренные равны двумъ прямымъ.

Пусть будетъ треугольникъ ABC; и одна его сторона BC пусть будетъ продолжена къ D. Говорю, что внѣшный уголъ ACD равенъ двумъ внутреннымъ противулежащимъ угламъ CAB, ABC; и треугольника внутренные три угла ABC, BCA, CAB равны двумъ прямымъ.

Чрезъ точку C проведи, параллельную къ
31. AB, прямую CE.

Поелику AB параллельна къ CE, и на нихъ падаетъ прямая AC; то накось лежащіе углы
29. BAC, ACE взаимно равны. Еще же, поелику AB параллельна къ CE, и на нихъ падаетъ прямая BD; то внѣшный уголъ ECD равенъ

внутреннему противулежащему углу ABC*. *29.
А доказано, что и уголъ ACE равенъ углу BAC; чего ради цѣлый внѣшный уголъ ACD равенъ двумъ внутреннымъ противулежащимъ угламъ BAC, ABC.

Придай обще уголъ ACB; посему углы ACD, ACB равны тремъ угламъ ABC, BCA, CAB. Но углы ACD, ACB равны двумъ прямымъ*; чего ради и углы ACB, CBA, CAB равны двумъ прямымъ. *13.

Итакъ всякаго, и проч. ч. и д. н. (17).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Прямыя, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ съ тойже стороны, суть и сами равны и параллельны.

Пусть будутъ AB, CD равныя и параллельныя прямыя; и пусть соединяютъ концы ихъ съ тойже стороны прямыя AC, BD. Говорю, что и прямыя AC, BD суть равны и параллельны.

Протяни BC.

Поелику AB параллельна къ CD, и на нихъ падаетъ BC; то накось лежащіе углы ABC, BCD взаимно равны*. И поелику AB равна *29.
CD, а BC общая; то двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ CD, BC; и уголъ ABC равенъ углу BCD: посему* основаніе AC *4.

равно основанію BD; и треугольникъ ABC равенъ треугольнику BCD; и прочіе углы будутъ равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ; посему уголъ ACB равенъ углу CBD. И поелику на двѣ прямыя AC, BD, падаетъ третья прямая BC, и дѣлаетъ накось лежащіе углы ACB, CBD взаимно равные; то AC па-
27. раллельна къ BD. А доказано что и ей равна: Итакъ, прямыя соединяющія, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Параллелограммовъ какъ противулежащія стороны, такъ и противулежащіе углы, суть взаимно равны: и поперечникъ (διάμετρος) дѣлитъ сіи фигуры по поламъ.

Пусть будетъ ACDB параллелограммъ, а BC его поперечникъ. Говорю, что параллелограмма ACDB, какъ противулежащія стороны, такъ и противулежащіе углы, суть взаимно равны; и поперечникъ BC дѣлитъ оный по поламъ.

опр. 36. Поелику AB параллельна къ CD, и на нихъ падаетъ прямая BC; то накось лежащіе углы
29. ABC, BCD суть взаимно равны. Еще же, поелику AC параллельна къ BD, и на нихъ падаетъ BC; то накось лежащіе углы ACB,

CBD суть взаимно равны. Итакъ два треугольника ABC, BCD имѣютъ два угла ABC, BCA равные двумъ угламъ BCD, CBD, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежатъ равнымъ угламъ, то есть, общую имъ сторону BC: посему* *26.
и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; и остальной уголъ равный остальному углу; посему сторона AB равна CD, а AC равна BD, и уголъ BAC равенъ углу BDC. И поелику уголъ ABC равенъ углу BCD, а уголъ CBD углу ACB; посему и цѣлый уголъ ABD равенъ цѣлому углу ACD. А доказано, что уголъ BAC равенъ углу BDC:

Итакъ параллелограммовъ какъ противулежащія стороны, такъ и противулежащіе углы, суть взаимно равны.

Говорю же, что поперечникъ дѣлитъ сіи фигуры по поламъ. Поелику AB равна CD, а BC общая; то двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ DC, CB, каждая каждой; и уголъ ABC равенъ углу BCD: посему* и *4.
основаніе AC равно основанію BD; и треугольникъ ABC равенъ треугольнику BCD.

Итакъ поперечникъ BC дѣлитъ параллелограммъ ACDB по поламъ. ч. и д. н. (18).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Параллелограммы, стоящіе на томъже основаніи и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ параллелограммы ABCD, EBCF, стоящіе на томъже основаніи BC, и между тѣмиже параллельными AF, BC. Говорю, что параллелограммъ ABCD равенъ параллелограмму EBCF.

Поелику ABCD есть параллелограммъ, то
34. AD равна BC; потому же и EF равна BC: слѣдовательно AD равна EF. И DE имъ есть общая: чего ради и цѣлая AE равна цѣлой DF. А поелику и AB равна DC; то двѣ прямыя EA, AB равны двумъ прямымъ FD, DC, каждая каждой; и уголъ FDC равенъ углу
29. EAB, внѣшный внутреннему: посему основаніе EB равно основанію FC; и треугольникъ EAB равенъ треугольнику FDC. Отними обще треугольникъ DGE; посему остальная трапеція ABGD равна остальной трапеціи EGCF. Придай обще треугольникъ GBC; посему цѣлой параллелограммъ ABCD равенъ цѣлому параллелограмму EBCF.

Итакъ параллелограммы, стоящіе, и проч. ч. и д. н. (19).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Параллелограммы, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ параллелограммы ABCD, EFGH, стоящіе на равныхъ основаніяхъ BC, FG, и между тѣмиже параллельными AH, BG. Говорю, что параллелограммъ ABCD равенъ параллелограмму EFGH.

Протяни BE, CH.

Поелику BC равна FG*, а и EH равна FG; *34.
посему и BC равна EH. Онѣ же и параллельны; и соединяютъ концы ихъ прямыя BE, CH. Но прямыя, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ прямыхъ съ тойже стороны, суть и сами равны и параллельны*; по- *33.
сему EB, CH суть равны и параллельны. А посему BCHE есть параллелограммъ*: и онъ ра- *опр. 36.
венъ параллелограмму ABCD*; ибо стоитъ *35.
на томъже съ нимъ основаніи BC, и между тѣмиже параллельными BC, AH. Потому же и параллелограммъ EFGH равенъ оному же параллелограмму EBCH. Чего ради параллелограммъ ABCD равенъ параллелограмму EFGH.

Итакъ параллелограммы, стоящіе и проч.

Ч. И Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Треугольники, стоящіе на томъ же основаніи и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ треугольники ABC, DBC, стоящіе на томъже основаніи BC, и между тѣмиже параллельными AD, BC. Говорю, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC.

Продолжи AD на обѣ стороны къ точкамъ E, F; и чрезъ B проведи, параллельную къ
31. CA, прямую BE; а чрезъ C проведи, параллельную къ BD, прямую CF.

Итакъ каждый изъ четыреугольниковъ
опр.36. EBCA, DBCF есть параллелограммъ: и параллелограммъ EBCA равенъ параллелог-
35. рамму DBCF; ибо стоятъ на томъже основаніи BC, и между тѣмиже параллельными BC, EF. Притомъ треугольникъ ABC есть
34. половина параллелограмма EBCA, ибо поперечникъ AB дѣлитъ оный по поламъ; а треугольникъ DBC есть половина параллелограмма DBCF, ибо поперечникъ DC дѣлитъ оный по поламъ. Но половины равныхъ суть взаимно равны: чего ради треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC.

Итакъ треугольники, стоящіе, и проч. ч. и д. п.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Треугольники, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и между тѣмиже параллельными, суть взаимно равны.

Пусть будутъ треугольники ABC, DEF, стоящіе на равныхъ основаніяхъ BC, EF, и между тѣмиже параллельными BF, AD. Говорю, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику DEF.

Продолжи AB на обѣ стороны къ точкамъ G, H; и чрезъ B проведи, параллельную къ CA, прямую BG*; а чрезъ F проведи, параллельную къ DE, прямую FH. *31.

Итакъ каждый изъ четыреугольниковъ GBCA, DEFH есть параллелограммъ*: и параллелограмъ GBCA равенъ параллелограмму DEFH*; ибо стоятъ на равныхъ основаніяхъ BC, EF, и между тѣмиже параллельными BF, GH. Притомъ треугольникъ ABC есть половина параллелограмма GBCA*, ибо поперечникъ BA дѣлитъ оный по поламъ; а треугольникъ DEF есть половина параллелограмма DEFH, ибо поперечникъ DF дѣлитъ оный по поламъ. Но половины равныхъ суть взаимно равны: чего ради треугольникъ ABC равенъ треугольнику DEF.

*опр.36. *36. *34.

Итакъ треугольники, стоящіе, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Равные треугольники, стоящіе на томъже основаніи и по туже сторону, суть между тѣмиже параллельными.

Пусть будутъ равные треугольники ABC, DBC, стоящіе на томъже основаніи BC, и по туже сторону. Говорю, что они суть между тѣмиже параллельными.

Ибо протяни AD. Говорю, что AD параллельна къ BC.

31. Буде же не такъ; то чрезъ точку A проведи, параллельную къ BC, прямую AE; и протяни EC.

37. Итакъ треугольникъ ABC равенъ треугольнику EBC; ибо стоятъ на томъже основаніи BC, и между тѣмиже параллельными BC, AE. Но треугольникъ ABC равенъ треугольнику DBC: посему и треугольникъ DBC равенъ треугольнику EBC, большій меньшему; что невозможно. Посему AE не параллельна къ BC. То же докажемъ и о всякой другой, кромѣ AD: чего ради AD параллельна къ BC.

Итакъ равные треугольники, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Равные треугольники, стоящіе на равныхъ основаніяхъ и по туже сторону, суть между тѣмиже параллельными.

Пусть будутъ равные треугольники ABC, DCE, стоящіе на равныхъ основаніяхъ BC, CE, и по туже сторону. Говорю, что они суть между тѣмиже параллельными. Ибо протяни AD. Говорю, что AD параллельна къ BE.

Буде же не такъ; то чрезъ A проведи, параллельную къ BE, прямую AF*; и протяни EF. *31.

Итакъ треугольникъ ABC равенъ треугольнику FCE*; ибо стоятъ на равныхъ основаніяхъ BC, CE, и между тѣмиже параллельными BE, AF. Но треугольникъ ABC равенъ треугольнику DCE: посему и треугольникъ DCE равенъ треугольнику FCE, большій меньшему; что невозможно. Посему AF не параллельна къ BE. То же докажемъ и о всякой другой, кромѣ AD: чего ради AD параллельна къ BE. *38.

Итакъ равные треугольники, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLI.

Ежели параллелограммъ и треугольникъ стоятъ на томъже основаніи и между тѣмиже параллельными; то параллелограммъ будетъ двукратный треугольника.

Пусть будутъ параллелограммъ ABCD и треугольникъ EBC стоять на томъже основаніи BC, и между тѣмиже параллельными BC, AE. Говорю что параллелограммъ ABCD есть двукратный треугольника EBC.

Протяни AC.

Итакъ треугольникъ ABC равенъ тре-
37. угольнику EBC; ибо стоятъ на томъже основаніи BC, и между тѣмиже параллельными BC, AE. Но параллелограммъ ABCD есть
34. двукратный треугольника ABC; ибо поперечникъ AC дѣлитъ оный по поламъ. Чего ради параллелограммъ ABCD есть двукратный и треугольника EBC.

Итакъ, ежели параллелограммъ, и проч. ч. и д. н. (20).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLII.

Составить равный данному треугольнику параллелограммъ, въ углѣ равномъ данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ ABC данный треугольникъ, и D данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ составить равный треугольнику ABC параллелограммъ, въ углѣ равномъ прямолинейному углу D.

Раздѣли BC по поламъ въ E*; и протяни AE; и при прямой EC, и при точкѣ на ней E, составь уголъ CEF равный углу D; и чрезъ A проведи, параллельную къ EC, прямую AG; а чрезъ C проведи, параллельную къ EF, прямую CG. *10.

Итакъ FECG есть параллелограммъ*. И поелику BE равна EC: то треугольникъ ABE равенъ треугольнику AEC*, ибо стоятъ на равныхъ основаніяхъ BE, EC, и между тѣмиже параллельными BC, AG. Посему треугольникъ ABC есть двукратный треугольника AEC. Но и параллелограммъ FECG есть двукратный треугольника AEC*; ибо стоятъ на томъже основаніи EC, и между тѣмиже параллельными BC, AG: а посему параллелограммъ FECG равенъ треугольнику ABC; притомъ имѣетъ уголъ CEF равный данному углу D. *опр. 36. *38. *41.

Итакъ составленъ равный данному треугольнику ABC параллелограммъ FECG, въ углѣ CEF равномъ углу D. ч. и с. н.

* *

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIII.

Во всякомъ параллелограммѣ дополненія параллелограммовъ, кои около поперечника, суть взаимно равны.

Пусть будетъ ABCD параллелограммъ, и AC его поперечникъ; и около поперечника AC параллелограммы EH, FG; а такъ называемыя ихъ дополненія BK, KD. Говорю, что дополненіе BK равно дополненію KD.

Поелику ABCD есть параллелограммъ, и AC его поперечникъ; то треугольникъ ABC
34. равенъ треугольнику ADC. Еще же, поелику AEKH есть параллелограммъ, и AK его поперечникъ; то треугольникъ AEK равенъ треугольнику AHK. Потому же и треугольникъ KFC равенъ треугольнику KGC. И поелику треугольникъ AEK равенъ треугольнику AHK, а треугольникъ KFC треугольнику KGC: то треугольникъ AEK вмѣстѣ съ треугольникомъ KGC равенъ треугольнику AHK вмѣстѣ съ треугольникомъ KFC. Но и цѣлый треугольникъ ABC равенъ цѣлому треугольнику ADC: чего ради и остальное дополненіе BK равно остальному дополненію KD.

Итакъ во всякомъ параллелограммѣ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLIV.

На данной прямой поставить равный данному треугольнику параллелограммъ, въ въ углѣ равномъ данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ AB данная прямая, C а данный треугольникъ, и D данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ на данной прямой AB поставить равный данному треугольнику C параллелограммъ, въ углѣ равномъ углу D.

Составь равный треугольнику C параллелограммъ BEFG, въ углѣ EBG равномъ углу D*; и положи BE впрямъ съ BA; и продолжи FG къ H; и чрезъ A проведи, параллельную къ которой на есть изъ прямыхъ BG, EF, прямую AH*; и протяни HB. И поелику на параллельныя AH, EF падаетъ прямая HF; то углы AHF, HFE равны двумъ прямымъ*. Посему углы BHG, GFE меньше двухъ прямыхъ. А прямыя неопредѣленно продолженныя со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ, встрѣтятся*; посему HB, FE продолженныя встрѣтятся. Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся въ K; и чрезъ K проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ EA, FH, прямую KL;

*42.
*31.
*29.
*акс. 11.

и продолжи прямыя HA, GB къ точкамъ L, M.
опр. 36. Итакъ HLKF есть параллелограммъ, и HK его поперечникъ; и около поперечника HK параллелограммы AG, ME, а такъ называемыя ихъ дополненія LB, BF. Посему LB
43. равно BF. Но BF равно треугольнику C; посему и LB равно треугольнику C. И подобно
15. лику уголъ GBE равенъ углу ABM; но уголъ GBE равенъ и углу D: посему и уголъ ABM равенъ углу D.

Итакъ на данной прямой AB поставленъ равный данному треугольнику C параллелограммъ BL, въ углѣ ABM равномъ данному углу D. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLV.

Составить равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, въ данномъ прямолинейномъ углѣ.

Пусть будетъ ABCD данная прямолинейная фигура, а E данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ составить равный прямолинейной фигурѣ ABCD параллелограммъ, въ углѣ равномъ углу E.

Протяни DB; и составь равный треугольнику ABD параллелограммъ FH, въ углѣ
42. HKF равномъ углу E; и на прямой GH поставь

равный треугольнику DBC параллелограммъ GM, въ углѣ GHM равномъ углу E*. *44.

Поелику уголъ E равенъ каждому изъ угловъ HKF, GHM; то уголъ HKF равенъ углу GHM. Придай обще уголъ KHG; посему углы FKH, KHG равны угламъ KHG, GHM. Но углы FKH, KHG равны двумъ прямымъ*; *29. посему и углы KHG, GHM равны двумъ прямымъ. А посему при прямой HG и при точкѣ на ней H, двѣ прямыя KH, HM, не лежащія по туже сторону, дѣлаютъ смѣжные углы равные двумъ прямымъ: чего ради KH есть впрямъ съ HM. И поелику на параллельныя прямыя KM, FG падаетъ прямая HG; то накось лежащіе углы MHG, HGF взаимно равны*. Придай обще уголъ HGL; посему *29. углы MHG, HGL равны угламъ HGF, HGL. Но углы MHG, HGL равны двумъ прямымъ*; *29. посему и углы HGF, HGL равны двумъ прямымъ: чего ради FG есть впрямъ съ GL*. *14. И поелику KF равна HG и параллельна къ ней; но и ML равна HG и параллельна къ ней; посему KF равна ML и параллельна къ ней*: и соединяютъ концы ихъ прямыя KM, *30. FL; посему и прямыя KM, FL суть равны и параллельны*: чего ради KFLM есть па- *33. раллелограммъ. И поелику треугольникъ ABD

равенъ параллелограмму FH; а треугольникъ DBC параллелограмму GM: посему цѣлая прямолинейная фигура ABCD равна цѣлому параллелограмму KFLM.

Итакъ составленъ равный данной прямолинейной фигурѣ ABCD параллелограммъ KFLM, въ углѣ FKM равномъ данному углу E. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVI.

Изъ данной прямой написать квадратъ.

Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ изъ прямой AB написать квадратъ.

Къ прямой AB, отъ точки на ней A, про-
11. веди подъ прямыми углами прямую AC; и
3. положи AD равную AB; и чрезъ точку D про-
31. веди, параллельную къ AB, прямую DE; а чрезъ точку B проведи, параллельную къ AD, прямую BE.

опр.36. Итакъ ADEB есть пареллелограммъ; а
34. посему AB равна DE, а AD равна BE. Но AD равна AB; посему четыре прямыя BA, AD, DE, EB взаимно равны: чего ради параллелограммъ ADEB есть равносторонный. Говорю еще, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ на параллельныя AB, DE падаетъ прямая AD;
29. то углы BAD, ADE равны двумъ прямымъ. Но

уголъ BAD прямой; посему и уголъ ADE есть прямой. А параллелограммовъ какъ противулежащія стороны, такъ и противулежащіе углы взаимно равны*; посему и каждый изъ противулежащихъ угловъ ABE, BED есть прямой. Чего ради четыреугольникъ ADEB есть прямоугольный; а доказано, что и равносторонный: итакъ онъ есть квадратъ*, и написанъ изъ прямой AB. ч. и с. н. (21). *34. *опр. 30.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVII.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ, квадратъ изъ стороны, противулежащей прямому углу, равенъ квадратамъ изъ сторонъ, содержащихъ прямой уголъ.

Пусть будетъ ABC прямоугольный треугольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой. Говорю, что квадратъ изъ BC равенъ двумъ квадратамъ изъ BA, AC.

Напиши изъ BC квадратъ BDEC*; а изъ BA, AC квадраты GB, HC; и чрезъ A проведи, параллельную къ которой ни есть изъ прямыхъ BD, CE, прямую AL*; и протяни AD, FC. *46. *31.

Поелику каждый изъ угловъ BAC, BAG прямой; то при прямой BA, и при точкѣ на ней A, двѣ прямыя AC, AG, не лежащія по туже сторону, дѣлаютъ смѣжные углы

равные двумъ прямымъ: посему AC есть впрямъ съ AG. Потому же и AB есть впрямъ съ AH. И поелику уголъ DBC равенъ углу
*акс. 10. FBA, ибо каждый есть прямой; придай обще уголъ ABC: посему цѣлой уголъ DBA равенъ цѣлому углу FBC. И поелику двѣ прямыя DB, BA равны двумъ прямымъ CB, BF, каждая каждой; и уголъ DBA равенъ углу
4. FBC: то основанїе AD равно основанїю FC; и треугольникъ ABD равенъ треугольнику FBC. Притомъ параллелограммъ BL есть
41. двукратный треугольника ABD; ибо стоятъ на томъже основанїи BD, и между тѣмиже параллельными BD, AL: а квадратъ BG есть двукратный треугольника FBC; ибо такъ же стоятъ на томъже основанїи FB, и между тѣмиже параллельными FB, GC. А двукратныя равныхъ, взаимно равны; посему параллелограммъ BL равенъ квадрату GB. Подобно протянувъ AE, BK, докажется, что параллелограммъ CL равенъ квадрату HC. Посему цѣлой квадратъ BDEC равенъ квадратамъ GB, HC. Квадратъ же BDEC написанъ изъ BC; а квадраты GB, HC изъ BA, AC: чего ради квадратъ изъ стороны BC равенъ квадратамъ изъ сторонъ BA, AC.

Итакъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XLVIII.

Ежели треугольника квадратъ изъ одной стороны равенъ квадратамъ изъ двухъ прочихъ сторонъ; то уголъ содержимый двумя прочими сторонами треугольника есть прямой.

Пусть будетъ треугольника ABC квадратъ изъ одной стороны BC равенъ квадратамъ изъ сторонъ BA, AC. Говорю, что уголъ BAC есть прямой.

Проведи отъ точки A, къ прямой AC подъ прямыми углами, прямую AD*; и положи AD *11.
равную BA; и протяни DC.

Поелику DA равна AB; то и квадратъ изъ DA равенъ квадрату изъ AB. Придай обще квадратъ изъ AC; посему квадраты изъ DA, AC равны квадратамъ изъ BA, AC. Но квадратамъ изъ DA, AC равенъ квадратъ изъ DC*, ибо уголъ DAC прямой; а квадра- *47.
тамъ изъ BA, AC равенъ крадратъ изъ BC, по положенію: посему квадратъ изъ DC равенъ квадрату изъ BC; а посему и сторона DC равна сторонѣ BC. И поелику AD равна AB, а AC общая; то двѣ прямыя DA, AC равны двумъ прямымъ BA, AC; и основаніе DC равно основанію BC: посему уголъ DAC равенъ углуBAC*. Но уголъ DAC прямой; по- *8.
сему и уголъ BAC есть прямой.

Итакъ, ежели треугольника и пр. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА II.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. О всякомъ прямоугольномъ параллелограммѣ говорится, что оный содержимъ въ двухъ прямыхъ, содержащихъ прямой уголъ.

2. Во всякомъ параллелограммѣ, одинъ который ниесть изъ параллелограммовъ около поперечника его, вмѣстѣ съ двумя дополненіями, назовемъ наугольникомъ (γνώμων).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели будутъ двѣ прямыя, и одна изъ нихъ разсѣчена на сколько ниесть отрѣзковъ; то прямоугольникъ содержимый въ

сихъ двухъ прямыхъ, равенъ всѣмъ прямоугольникамъ содержимымъ въ неразсѣченной и въ каждомъ изъ отрѣзковъ разсѣченной.

Пусть будутъ A, BC двѣ прямыя; и пусть BC разсѣчена будетъ какъ ниесть въ точкахъ D, E. Говорю, что прямоугольникъ содержимый въ A, BC равенъ прямоугольнику содержимому въ A, BD, и прямоугольнику въ A, DE, и еще прямоугольнику въ A, EC.

Проведи отъ B, подъ прямыми углами къ BC прямую BF*; и положи прямую BG равную A*; и чрезъ G проведи, параллельную къ BC, прямую GH*; а чрезъ D, E, C проведи, параллельныя къ BG, прямыя DK, EL, CH. *11,1. *3,1. *31,1.

Итакъ прямоугольникъ BH равенъ всѣмъ прямоугольникамъ BK, DL, EH. Но прямоугольникъ BH содержится въ A, BC; ибо содержится въ GB, BC*, а BG равна A: прямоугольникъ же BK содержится въ A, BD; ибо содержится въ BG, BD, а BG равна A: а прямоугольникъ DL содержится въ A, DE, ибо DK, то есть BG, равна A: подобно же и прямоугольникъ EH содержится въ A, EC. Чего ради прямоугольникъ въ A, BC равенъ всѣмъ прямоугольникамъ: въ A, BD, и въ A, DE, и еще въ A, EC. *опр,1.

Итакъ, ежели будутъ двѣ прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниесть; то прямоугольники содержимые въ цѣлой и въ каждомъ изъ ея отрѣзковъ, равны квадрату изъ цѣлой прямой.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ C. Говорю, что прямоугольникъ въ AB, BC, вмѣстѣ съ прямоугольникомъ въ BA, AC, равенъ квадрату изъ AB.

46,1. Изъ AB напиши квадратъ ADEB; и чрезъ C проведи, параллельную къ которой ни есть

31,1. изъ прямыхъ AD, BE, прямую CF.

Итакъ прямоугольникъ AE равенъ прямоугольникамъ AF, CE. Но AE есть квадратъ изъ AB: а AF есть прямоугольникъ въ BA,

опр. 1. AC, ибо содержится въ DA, AC, а DA равна AB; и CE есть прямоугольникъ въ AB, BC, ибо BE равна AB. Чего ради прямоугольникъ въ BA, AC, вмѣстѣ съ прямоугольникомъ въ AB, BC, равенъ квадрату изъ AB.

Итакъ, ежели прямая линія, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниесть; то прямоугольникъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ, равенъ прямоугольнику содержимому въ обоихъ отрѣзкахъ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ отрѣзка прежде взятаго.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ C. Говорю, что прямоугольникъ въ AB, BC равенъ прямоугольнику въ AC, CB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ BC.

Изъ CB напиши квадратъ CDEB*; и продолжи ED къ F; и чрезъ точку A проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ CD, BE, прямую AF*. *46,I. *31,I.

Итакъ прямоугольникъ AE равенъ прямоугольникамъ AD, CE. Но AE есть прямоугольникъ въ AB, BC*, ибо содержится въ AB, BE, а BE равна BC; AD же есть прямоугольникъ въ AC, CB, ибо DC равна CB; а DB есть квадратъ изъ CB. Чего ради прямоугольникъ въ AB, BC равенъ прямоугольнику въ AC, CB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CB. *опр.I.

Итакъ, ежели прямая линія, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниесть; то квадратъ изъ цѣлой равенъ квадратамъ изъ отрѣзковъ, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ сихъ отрѣзкахъ содержимому.

Пусть будетъ прямая линія AB разсѣчена какъ ниесть въ C. Говорю, что квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC, CB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB.

46,1. Изъ AB напиши квадратъ ADEB; и протяни BD; и чрезъ C проведи, параллельную къ которой ни есть изъ прямыхъ AD, EB, прямую CGF; а чрезъ G проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ AB, DE, прямую HK.

Поелику CF параллельна къ AD, и на нихъ падаетъ BD; то внѣшный уголъ CGB равенъ
29,1. внутреннему противулежащему углу ADB.
5 ,1. Но уголъ ADB равенъ углу ABD, ибо BA равна AD; посему и уголъ CGB равенъ углу GBC; слѣдственно и сторона BC равна сторонѣ
34,1. CG. Но CB равна GK, а CG равна BK; посему и GK равна KB. Чего ради четыреугольникъ CGKB есть равносторонный. Говорю еще, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ CG параллельна къ BK, и на нихъ падаетъ CB; то

углы KBC, BCG равны двумъ прямымъ*. Но *29,1.
уголъ KBC прямой; посему и уголъ BCG есть прямой. Слѣдственно и противулежащіе имъ углы CGK, GKB суть прямые*; чего ради *34,1.
четыреугольникъ CGKB есть прямоугольный. А доказано, что онъ и равносторонный; посему онъ есть квадратъ*, и написанъ *опр.30,1.
изъ CB. Потому же и HF есть квадратъ, и написанъ изъ HG, то есть изъ AC. Посему HF, CK суть квадраты изъ AC, CB. И поелику прямоугольникъ AG равенъ GE*; *43,1.
и AG содержится въ AC, CB, ибо GC равна CB: посему и GE равенъ прямоугольнику въ AC, CB. Чего ради прямоугольники AG, GE равны дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB. Но HF, CK суть квадраты изъ AC, CB; посему четыре HF, CK, AG, GE равны квадратамъ изъ AC, CB, и дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB. А четыре HF, CK, AG, GE дѣлаютъ цѣлое ADEB, которое есть квадратъ изъ AB; чего ради квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC, CB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Говорю, что квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC,

CB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB.

Поелику, въ тойже фигурѣ, AB равна AD,
5,1. то уголъ ABD равенъ углу ADB. И поелику всякаго треугольника всѣ три угла равны
32,1. двумъ прямымъ; посему треугольника ABD три угла ABD, ADB, BAD равны двумъ прямымъ. Но уголъ BAD есть прямой; посему остальные углы ABD, ADB равны одному прямому: они же и взаимно равны; посему каждый изъ угловъ ABD, ADB есть половина прямаго. Но уголъ BCG есть прямой, ибо равенъ внутреннему противулежащему, что при A; посему остальной уголъ CGB есть половина прямаго; а посему уголъ CGB равенъ углу CBG; слѣдственно и сторона BC равна сто-
34,1. ронѣ CG. Но CB равна GK, а CG равна BK; посему четыреугольникъ CK есть равносторонный. Онъ же имѣетъ и прямой уголъ CBK; посему CK есть квадратъ, и написанъ изъ CB. Потому же и HF есть квадратъ, и равенъ квадрату изъ AC; а посему CK, HF суть квадраты, и равны квадратамъ изъ AC, CB. И поелику прямоугольникъ AG равенъ
43,1. GE, и AG содержится въ AC, CB, ибо CG равна CB; посему и EG равенъ прямоугольнику въ AC, CB: чего ради AG, GE равны

дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB. Но CK, HF равны квадратамъ изъ AC, CB; посему CK, HF, AG, GE равны квадратамъ изъ AC, CB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB. Но CK, HF и AG, GE дѣлаютъ цѣлое AE, которое есть квадратъ изъ AB; итакъ квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC, CB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ AC, CB. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что въ квадратахъ параллелограммы около поперечника суть также квадраты. (22).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели прямая линія разсѣчена на равныя и неравныя; то прямоугольникъ въ неравныхъ отрѣзкахъ содержимый, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ прямой, которая между сѣченіями, равенъ квадрату изъ половины цѣлой прямой.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена на равныя въ C, и на неравныя въ D. Говорю, что прямоугольникъ въ AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CD, равенъ квадрату изъ CB.

Изъ CB напиши квадратъ CEFB*; и протяни BE; и чрезъ D проведи, параллельную *46,1.

къ которой ни есть изъ прямыхъ CE, BF, прямую DG; и чрезъ G проведи, параллельную къ которой ни есть изъ прямыхъ AB, EF, прямую KLM; и еще чрезъ A проведи, параллельную къ которой ни есть изъ прямыхъ CL, BM, прямую AK.

Поелику дополненіе CH равно дополненію
43,1. HF; придай обще DM: посему цѣлой прямоугольникъ CM равенъ цѣлому DF. Но CM
36,1. равенъ AL, ибо AC равна CB; посему и AL равенъ DF. Придай обще CH; посему цѣлой прямоугольникъ AH равенъ двумъ DF и DL. Но AH содержится въ AD, DB, ибо DH равна DB; а два FD, DL дѣлаютъ наугольникъ
оп.2. NOP: посему наугольникъ NOP равенъ прямоугольнику въ AD, DB. Придай обще LG,
сл:4. который равенъ квадрату изъ CD; посему наугольникъ NOP и LG равны прямоугольнику въ AD, DB и квадрату изъ CD. Но наугольникъ NOP вмѣстѣ съ LG дѣлаютъ цѣлое CEFB, которое есть квадратъ изъ CB; чего ради прямоугольникъ въ AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CD, равенъ квадрату изъ CB.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели прямая линія разсѣчена по поламъ, и приложена къ ней впрямъ другая какая ниесть прямая; то прямоугольникъ содержимый въ цѣлой съ приложенною и въ приложенной, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ половины цѣлой, равенъ квадрату написанному изъ прямой, сложенной изъ оной половины и приложенной, какъ изъ одной.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена по поламъ въ точкѣ C; и пусть приложена будетъ къ ней впрямъ другая какая ниесть прямая BD. Говорю, что прямоугольникъ въ AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CB, равенъ квадрату изъ CD.

Изъ CD напиши квадратъ CEFD; и протяни DE; и чрезъ точку B проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ CE, DF, прямую BG; а чрезъ точку H проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ AD, EF, прямую KM; и еще чрезъ A проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ CL, DM, прямую AK.

Поелику AC равна CB; то и прямоугольникъ AL равенъ прямоугольнику CH*. Но CH *36,1.
равенъ HF*; посему и LA равенъ HF. При- *43,1.
дай обще CM; посему цѣлой прямоугольникъ

AM равенъ наугольнику NOP. Но AM содер-
сл:4. жится въ AD, DB, ибо DM равна DB; по-
сему и наугольникъ NOP равенъ прямоуголь-
нику въ AD, DB. Придай обще LG, который
равенъ квадрату изъ CB; посему прямоуголь-
никъ въ AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ
CB, равенъ наугольнику NOP, вмѣстѣ съ
LG. Но наугольникъ NOP вмѣстѣ съ LG дѣ-
лаютъ цѣлое CEFD, которое есть квад-
ратъ изъ CD; чего ради прямоугольникъ въ
AD, DB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ CB, ра-
венъ квадрату изъ CD.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниесть; то квадраты изъ цѣлой и одного изъ ея отрѣзковъ, оба вмѣстѣ, равны дважды взятому прямоугольнику содержимому въ цѣлой и въ сказанномъ отрѣзкѣ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ остальнаго отрѣзка.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ C. Говорю, что квадраты изъ AB, BC равны дважды взятому прямоугольнику въ AB, BC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AC.

Изъ AB напиши квадратъ ADEB, и допиши фигуру.

Поелику прямоугольникъ AG равенъ GE*; *43,1.
придай обще CF; посему и цѣлый AF равенъ цѣлому CE. А посему AF, CE суть двукратные прямоугольника AF. Но AF, CE дѣлаютъ наугольникъ KLM и квадратъ CF; посему наугольникъ KLM и квадратъ CF суть двукратные прямоугольника AF. Но прямоугольника AF двукратный также есть и дважды взятый прямоугольникъ въ AB, BC, ибо BF равна BC*; посему наугольникъ KLM, вмѣстѣ *сл: 4.
съ квадратомъ CF, равны дважды взятому прямоугольнику въ AB, BC. Придай обще HN, который есть квадратъ изъ AC; посему наугольникъ KLM, вмѣстѣ съ квадратами CF, HN, равны дважды взятому прямоугольнику въ AB, BC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AC. Но наугольникъ KLM вмѣстѣ съ квадратами CF, HN, дѣлаютъ цѣлое ADEB и CF, кои суть квадраты изъ AB, BC; чего ради квадраты изъ AB, BC равны дважды взятому прямоугольнику въ AB, BC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AC.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели прямая линія разсѣчена какъ ниесть; то четырежды взятый прямоуголь-

никъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ остальнаго отрѣзка, равенъ квадрату написанному изъ цѣлой и прежде сказаннаго отрѣзка, какъ изъ одной прямой.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ C. Говорю, что четырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AC, равенъ квадрату написанному изъ AB, BC, какъ изъ одной прямой.

Продолжи впрямъ съ AB прямую BD; и по-
3,1. ложи прямую BD равную CB; и изъ AD напиши квадратъ AEFD; и допиши двойную фигуру.

34,1. Поелику BC равна BD; и CB равна GK, а BD равна KN: посему и GK равна KN. Потому же и QR равна RP. И поелику CB равна BD, а GK равна KN; посему прямоугольникъ
36,1. CK равенъ BN, а GR равенъ KP. Но CK ра-
43,1. венъ RN; ибо суть дополненія въ параллелограммѣ CP: посему BN равенъ GR. Чего ради четыре CK, KD, GR, RN взаимно равны, и суть четырекратны прямоугольника CK. Еще же, поелику CB равна BD; и BD
34,1. равна BK, то есть CG, а CB равна GK, то есть GQ: посему и CG равна GQ. И

поелику CG равна GQ, а QR равна RP; посему прямоугольникъ AG равенъ MQ, а QL равенъ RF*. Но MQ равенъ QL; ибо суть дополненія въ параллелограммѣ ML: посему и AG равенъ RF. Чего ради четыре AG, MQ, QL, RF взаимно равны, и суть четырекратны прямоугольника AG. А доказано, что и четыре CK, KD, GR, RN четырекратны прямоугольника CK; посему восемь, кои содержитъ наугольникъ STV, суть четырекратны прямоугольника AK. И поелику AK содержится въ AB, BD, ибо KB равна BD*; то четырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BD есть четырекратный прямоугольника AK. А доказано, что прямоугольника AK есть четырекратный и наугольникъ STV; посему четырежды взятый прямоугльникъ въ AB, BD равенъ наугольнику STV. Придай обще OH, который равенъ квадрату изъ AC*; посему четырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BD, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AC, равенъ наугольнику STV вмѣстѣ съ OH. Но наугольникъ STV и OH дѣлаютъ цѣлой крадратъ AEFD, который есть изъ AD; чего ради четырежды взятый прямоугольникъ въ AB, BD, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AC, равенъ квадрату изъ AD, то есть, квадрату

*36,1.

*сл:4.

*сл:4.

написанному изъ AB и BC, какъ изъ одной прямой.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели прямая линія разсѣчена на равныя и неравныя; то квадраты изъ неравныхъ отрѣзковъ прямой суть двукратные квадрата изъ половины и квадрата изъ прямой между сѣченіями.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена на равныя въ C, и на неравныя въ D. Говорю, что квадраты изъ AD, DB суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD.

Проведи отъ C, подъ прямыми углами къ AB, прямую CE; и положи ее равную которой ниесть изъ прямыхъ AC, CB; и протяни AE, EB; и чрезъ D проведи, параллельную къ EC, прямую DF; а чрезъ F проведи, параллельную къ AB, прямую FG; и протяни AF.

Поелику AC равна CE; то уголъ EAC равенъ углу AEC*. И поелику уголъ при C прямой, то остальные EAC, AEC равны одному прямому*; они же и равные: посему каждый изъ угловъ CEA, CAE есть половина прямаго. Потому же и каждый изъ угловъ CEB, EBC есть половина прямаго; слѣдственно цѣлой

*5,I.

*32,I.

уголъ AEB есть прямой. И поелику уголъ GEF половина прямаго; и уголъ EGF прямой, ибо онъ равенъ внутреннему противулежащему ECB*: то и остальной EFG есть половина прямаго; посему уголъ GEF равенъ углу EFG; слѣдственно и сторона EG равна сторонѣ GF*. Еще же, поелику уголъ при B половина прямаго; и уголъ FDB прямой, ибо также и онъ равенъ внутреннему противулежащему ECB: то и остальной DFB есть половина прямаго; посему уголъ при B равенъ углу DFB; слѣдственно и сторона FD равна сторонѣ DB. *29,I. *6,I.

И поелику AC равна CE: то квадратъ изъ AC равенъ квадрату изъ CE; посему квадраты изъ AC, CE суть двукратные квадрата изъ AC. Но квадратамъ изъ AC, CE равенъ квадратъ изъ AE*, ибо уголъ ACE есть прямой; посему квадратъ изъ AE есть двукратный квадрата изъ AC. Еще же, поелику EG равна GF: то квадратъ изъ EG равенъ квадрату изъ GF; посему квадраты изъ EG, GF суть двукратные квадрата изъ GF. Но квадратамъ изъ EG, GF равенъ квадратъ изъ EF*; посему квадратъ изъ EF есть двукратный квадрата изъ GF. И какъ GF равна CD; посему квадратъ изъ EF есть двукратный квадрата изъ CD. Но и квадратъ изъ AE есть *47,I. *47,I.

двукратный квадрата изъ AC; посему квадраты изъ AE, EF суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD. Квадратамъ же изъ AE, EF равенъ квадратъ изъ AF, ибо уголъ AEF есть прямой; посему квадратъ изъ AF есть двукратный квадратовъ изъ AC, CD. А квадрату изъ AF равны квадраты изъ AD, DF, ибо уголъ при D есть прямой; посему квадраты изъ AD, DF суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD. Но DF равна DB; чего ради и квадраты изъ AD, DB суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Ежели прямая линія разсѣчена по поламъ, и приложена къ ней впрямъ другая какая ниесть прямая; то квадраты изъ цѣлой съ приложенною, и изъ приложенной, оба вмѣстѣ, суть двукратные квадрата изъ половины, и еще квадрата написаннаго изъ прямой, сложенной изъ оной половины и приложенной, какъ изъ одной.

Пусть будетъ прямая AB разсѣчена по поламъ въ C; и пусть приложена будетъ къ ней впрямъ какая ниесть прямая BD. Говорю, что квадраты изъ AD, DB суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD.

Проведи отъ C, подъ прямыми углами къ AB, прямую CE*; и положи ее равную которой ниесть изъ прямыхъ AC, CB; и протяни EA, EB; и чрезъ E проведи, параллельную къ AD, прямую EF*, а чрезъ D еще проведи, параллельную къ CE, прямую FD. И поелику на параллельныя прямыя EC, FD падаетъ прямая EF: то углы CEF, EFD равны двумъ прямымъ*; посему углы FEB, EFD меньше двухъ прямыхъ. Но прямыя, продолженныя со стороны угловъ, кои меньше двухъ прямыхъ, встрѣтятся; посему прямыя EB, FD, продолженныя встрѣтятся со стороны BD. Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся въ G; и протяни AG.

*11,I. *31,I. *29,I.

Поелику AC равна CE; то уголъ AEC равенъ углу EAC*. Но уголъ при C прямой; посему каждый изъ угловъ EAC, AEC есть половина прямаго*. Потому же и каждый изъ угловъ CEB, EBC есть половина прямаго; слѣдственно цѣлой уголъ AEB есть прямой. И поелику уголъ EBC половина прямаго; то и уголъ DBG, есть половина прямаго*. А и уголъ BDG прямой, ибо онъ равенъ накось лежащему DCE*: посему остальной уголъ DGB есть половина прямаго; а посему уголъ DGB равенъ углу DBG; слѣдственно и сторона BD равна сторонѣ DG*. Еще же, поели-

*5,I. *32,I. *15,I. *29,I. *6,I.

ку уголъ EGF половина прямаго; и уголъ при F прямой, ибо онъ равенъ противулежащему
29,1. что при C: посему остальной уголъ FEG есть половина прямаго; а посему уголъ EGF равенъ углу FEG; слѣдственно и сторона GF равна
6,1. сторонѣ FE. И поелику EC равна CA: то и квадратъ изъ EC равенъ квадрату изъ CA; посему квадраты изъ EC, CA суть двукратные квадрата изъ CA. Квадратамъ же изъ
47,1. EC, CA равенъ квадратъ изъ AE; посему квадратъ изъ EA есть двукратный квадрата изъ AC. Еще же, поелику FG равна FE: то квадратъ изъ FG равенъ квадрату изъ FE; посему квадраты изъ GF, FE суть двукратные квадрата изъ EF. Квадратамъ же изъ
47,1. GF, FE равенъ квадратъ изъ EG; посему квадратъ изъ EG есть двукратный квадрата изъ EF. И EF равна CD; посему квадратъ изъ EG есть двукратный квадрата изъ CD. А доказано, что и квадратъ изъ EA есть двукратный квадрата изъ AC; посему квадраты изъ AE, EG суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD. Квадратамъ же изъ AE,
47,1. EG равенъ квадратъ изъ AG; посему квадратъ изъ AG есть двукратный квадратовъ изъ AC, CD. А квадрату изъ AG равны квад-
47,1. раты изъ AD, DG; посему квадраты изъ AD, DG суть двукратные крадратовъ изъ

AC, CD. Но DG равна DB; чего ради и квадраты изъ AD, DB суть двукратные квадратовъ изъ AC, CD.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Данную прямую разсѣчь такъ, чтобы прямоугольникъ содержимый въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ остальнаго отрѣзка.

Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ AB разсѣчь такъ, чтобы прямоугольникъ въ цѣлой и въ одномъ изъ ея отрѣзковъ былъ равенъ квадрату изъ остальнаго отрѣзка.

Изъ AB напиши квадратъ ABDC*; и раз- *46,1.
дѣли AC по поламъ въ точкѣ E*; и протяни *10,1.
BE; и продолжи CA къ F; и положи прямую EF равную BE; и изъ AF напиши квадратъ FH; и продолжи GH къ K. Говорю, что AB разсѣчена въ H такъ, что прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ AH.

Поелику прямая AC разсѣчена по поламъ въ E, и приложена къ ней впрямъ AF; то прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EF*. *6.
Но EF равна EB; посему прямоугольникъ въ

CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадрату изъ EB. А квадрату изъ
47,1. EB равны квадраты изъ BA, AE, ибо уголъ при A есть прямой; посему прямоугольникъ въ CF, FA, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ AE, равенъ квадратамъ изъ BA, AE. Отними обще квадратъ изъ AE; посему остальной прямоугольникъ въ CF, FA равенъ квадрату изъ AB. Но прямоугольникъ въ CF, FA есть FK, ибо AF равна FG; а квадратъ изъ AB есть AD: почему FK равенъ AD. Отними обще AK; посему остальной FH равенъ остальному HD. И поелику HD есть прямоугольникъ въ AB, BH, ибо AB равна BD; а FH есть квадратъ изъ AH: чего ради прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA.

Итакъ данная прямая AB разсѣчена въ H такъ, что прямоугольникъ въ AB, BH равенъ квадрату изъ HA. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Въ тупоугольныхъ треугольникахъ, квадратъ изъ стороны, противулежащей тупому углу, больше квадратовъ изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ, дважды взятымъ

прямоугольникомъ, содержимымъ въ одной изъ сторонъ около тупаго угла, на которую продолженную падаетъ перпендикуляръ, и въ прямой при тупомъ углѣ перпендикуляромъ внѣ отнимаемой.

Пусть будетъ ABC тупоугольный треугольникъ, имѣющій уголъ BAC тупой; и отъ точки B пусть будетъ проведена, перпендикулярная къ продолженной CA, прямая BD. Говорю, что квадратъ изъ BC больше квадратовъ изъ BA, AC, дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CA, AD.

Поелику прямая CD разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ A; то квадратъ изъ CD равенъ квадратамъ изъ CA, AD, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CA, AD*. Придай *4.
обще квадратъ изъ DB; посему квадраты изъ CD, DB равны квадратамъ изъ CA, AD, DB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CA, AD. Но квадратамъ изъ CD, DB равенъ квадратъ изъ CB*, ибо уголъ при D *47,1.
есть прямой; а квадратамъ изъ AD, DB равенъ квадратъ изъ AB: посему квадратъ изъ CB равенъ квадратамъ изъ CA, AB, и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CA, AD. Чего ради квадратъ изъ CB больше квадратовъ изъ CA, AB, дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CA, AD.

Итакъ въ тупоугольныхъ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Въ остроугольныхъ треугольникахъ, квадратъ изъ стороны, противулежащей остроту углу, меньше квадратовъ изъ сторонъ, содержащихъ острой уголъ, дважды взятымъ прямоугольникомъ, содержимымъ въ одной изъ сторонъ около остраго угла, на которую падаетъ перпендикуляръ, и въ прямой при остромъ углѣ перпендикуляромъ внутрь отнимаемой.

Пусть будетъ ABC остроугольный треугольникъ, имѣющій уголъ при B острой; и отъ точки A пусть будетъ проведена, перпендикулярная къ BC, прямая AD. Говорю, что квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB, BA, дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CB, BD.

Поелику прямая CB разсѣчена какъ ниесть въ D; то квадраты изъ CB, BD равны дважды взятому прямоугольнику въ CB, BD,
7. вмѣстѣ съ квадратомъ изъ DC. Придай обще квадратъ изъ DA; посему квадраты изъ CB, BD, DA равны дважды взятому прямоугольнику въ CB, BD, и вмѣстѣ квадратамъ изъ AD, DC. Но квадратамъ изъ BD, DA равенъ
47.1. квадратъ изъ AB, ибо уголъ при D есть прямой; а квадратамъ изъ AD, DC равенъ

квадратъ изъ AC: посему квадраты изъ CB, BA равны квадрату изъ AC и вмѣстѣ дважды взятому прямоугольнику въ CB, BD. Чего ради одинъ квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB, BA, дважды взятымъ прямоугольникомъ въ CB, BD.

Итакъ въ остроугольныхъ, и проч. ч. и д. н. (23).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Составить квадратъ равный данной прямолинейной фигурѣ.

Пусть будетъ A данная прямолинейная фигура. Надлежитъ составить квадратъ равный прямолинейной фигурѣ A.

Составь прямоугольный параллелограммъ BD, равный прямолинейной фигурѣ A*. *45,1.
И естьли BE равна ED: то требуемое сдѣлано; ибо составленъ квадратъ BD равный прямолинейной фигурѣ A. Естьли же нѣтъ, то одна изъ прямыхъ BE, ED есть большая. Пусть будетъ BE большая: продолжи оную къ F; и положи прямую EF равную ED; и раздѣли BF по поламъ въ G*; и *10,1.
изъ центра G, разстояніемъ одной изъ прямыхъ GB, GF, напиши полукружіе BHF; и продолжи DE къ H; и протяни GH.

Поелику прямая BF разсѣчена на равныя

въ G, и на неравныя въ E; то прямоугольникъ
въ BE, EF, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ GE,
5. равенъ квадрату изъ GF. Но GF равна GH;
посему прямоугольникъ въ BE, EF, вмѣстѣ
съ квадратомъ изъ GE, равенъ квадрату изъ
GH. Квадрату же изъ GH равны квадраты
47,1. изъ HE, EG; посему прямоугольникъ въ BE,
EF, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ GE, равенъ
квадратамъ изъ HE, EG. Отними обще
квадратъ изъ GE, посему остальной прямо-
угольникъ въ BE, EF равенъ квадрату изъ
EH. Но прямоугольникъ въ BE, EF есть BD,
ибо EF равна ED; посему параллелограммъ
BD равенъ квадрату изъ HE. А BD равенъ
прямолинейной фигурѣ A; чего ради прямо-
линейная фигура A равна квадрату изъ EH.

Итакъ, составленъ равный данной прямо-
линейной фигурѣ A квадратъ, то есть, на-
писанный изъ EH. ч. и с. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА III.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Равные круги суть тѣ, коихъ поперечники равны; или въ коихъ прямыя изъ центровъ равны. (24).

2. Прямая называется касательною къ кругу, которая прикасается къ кругу, и будучи продолжена не пресѣкаетъ его.

3. Круги называются взаимно касательными, кои взаимно прикасаясь, не пресѣкаютъ одинъ другаго.

4. Въ кругѣ прямыя называются равноотстоящими отъ центра, когда отъ центра проведенныя перпендикулярныя къ нимъ суть равны.

5. Больше же отстоящею называется та, на которую большая перпендикулярная падаетъ.

«5а. Дуга круга есть часть его окружности.»

6. Отрѣзокъ круга есть фигура, содержимая прямою и дугою круга.

7. Уголъ отрѣзка есть тотъ, который содержится прямою и окружностїю круга.

8. Когда на дугѣ отрѣзка возмется какая ниесть точка, и отъ оной къ концамъ прямой, которая есть основанїе отрѣзка, протянутся прямыя; то содержимый протянутыми прямыми уголъ, называется угломъ въ отрѣзкѣ.

9. Когда прямыя, содержащїя уголъ, отнимаютъ какую ниесть дугу; то говорится, что уголъ стоитъ на ней.

10. Когда при центрѣ круга стоитъ уголъ; то фигура содержимая прямыми содержащими сей уголъ, и дугою, которую прямыя отнимаютъ, называется вырѣзкомъ круга.

11. Подобные отрѣзки круга суть тѣ, кои вмѣщаютъ равные углы; или въ коихъ углы взаимно равны. (25).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Даннаго круга найти центръ.

Пусть будетъ ABC данный кругъ. Надлежитъ круга ABC найти центръ.

Проведи въ немъ какую ниесть прямую AB; и раздѣли оную по поламъ въ точкѣ D*; и отъ D проведи, подъ прямыми углами *10,I.
къ AB, прямую CD*; и продолжи оную до *11,I.
E; и раздѣли CE по поламъ въ F. Говорю, что F есть центръ круга ABC.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ G. Протяни GA, GD, GB.

Поелику AD равна DB, а DG общая; то двѣ прямыя AD, DG равны двумъ прямымъ BD, DG, каждая каждой; и основаніе GA равно основанію GB, ибо суть изъ центра G: посему уголъ ADG равенъ углу GDB*. Когда *8,I.
же прямая, поставленная на другую прямую, дѣлаетъ смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ: посему уголъ GDB есть прямой. Но и уголъ FDB прямой: посему уголъ FDB равенъ углу GDB, большій меньшему; что невозможно. А посему точка G не есть центръ круга ABC. Подобно же докажемъ, что и ни другая какая ниесть, кромѣ F. Итакъ точка F есть центръ круга ABC. ч. и с. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли въ кругѣ какая ниесть прямая другую прямую разсѣкаетъ по поламъ и подъ прямыми углами; то на сѣкущей есть центръ круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели на окружности круга взяты какія ниесть двѣ точки; то прямая протянутая чрезъ сіи точки, упадетъ внутри круга.

Пусть будетъ ABC кругъ; и на окружности его пусть будутъ взяты какія ниесть двѣ точки A, B. Говорю, что прямая отъ A къ B протянутая, упадетъ внутри круга.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, падаетъ внѣ, какъ AEB. Возьми
1. центръ круга ABC, и пусть будетъ оный D; и протяни DA, DB; и проведи DF до E.

Поелику DA равна DB; то уголъ DAE
5,1. равенъ углу DBE. И поелику треугольника DAE одна сторона AEB продолжена; то
16,1. уголъ DEB больше угла DAE. Но уголъ DAE равенъ углу DBE, посему уголъ DEB больше угла DBE. А большему углу противуле-
19,1. житъ большая сторона; посему DB больше DE. Но DB равна DF; посему DF больше DE, меньшая большей; что невозможно. А

посему прямая, протянутая отъ A къ B, не упадетъ внѣ круга. Подобно же докажемъ, что и ни на окружность; чего ради упадетъ внутри круга.

Итакъ, ежели на окружности, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели въ кругѣ прямая какая ниесть, проходящая чрезъ центръ, прямую какую ниесть, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами; и ежели разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то разсѣчетъ оную и по поламъ.

Пусть будетъ ABC кругъ; и въ немъ пусть прямая какая ниесть CD, проходящая чрезъ центръ, прямую какую ниесть AB, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ въ точкѣ F. Говорю, что разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами.

Возьми центръ круга ABC*, и пусть *1.
будетъ оный E; и протяни EA, EB.

Поелику AF равна FB, а FE общая; то двѣ прямыя равны двумъ прямымъ; и основаніе EA равно основанію EB: посему уголъ AFE равенъ углу EFB*. Когдаже прямая, *8,1.
поставленная на другую прямую, дѣлаетъ

смѣжные углы взаимно равные; то каждый изъ равныхъ угловъ называется прямымъ: посему каждый изъ угловъ AFE, BFE есть прямой. Чего ради прямая CD проходящая чрезъ центръ, и разсѣкающая по поламъ прямую AB, непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ оную и подъ прямыми углами.

Но пусть же прямая CD прямую AB разсѣкаетъ подъ прямыми углами. Говорю, что разсѣчетъ оную и по поламъ, то есть, что AF равна FB.

Ибо сдѣлавъ тоже строеніе, поелику EA
5,I. равна EB; то уголъ EAF равенъ углу EBF. Но и прямой уголъ AFE равенъ прямому BFE; посему два треугольника EAF, EFB имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, имъ общую EF, противулежащую одному изъ равныхъ угловъ: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ
26,I. сторонамъ. Чего ради AF равна FB.

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкаются, и не проходятъ обѣ чрезъ центръ; то обѣ не пресѣкутся взаимно по поламъ.

Пусть будетъ ABCD кругъ; и пусть въ немъ двѣ прямыя AC, BD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E, и не проходятъ обѣ чрезъ центръ. Говорю, что обѣ не пресѣкутся взаимно по поламъ.

Ибо, буде возможно, пусть обѣ пресѣкутся по поламъ, такъ что AE равна EC, и BE равна ED. Возьми центръ круга ABCD*, и пусть будетъ оный F; и протяни FE. *1.

Поелику прямая FE, проходящая чрезъ центръ, прямую AC, непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами*: посему уголъ FEA есть прямой. Еще же, поелику прямая FE, «проходящая чрезъ центръ», прямую BD, не проходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ по поламъ; то разсѣчетъ оную и подъ прямыми углами: посему уголъ FEB есть прямой. А доказано, что и уголъ FEA прямой: посему уголъ FEA равенъ углу FEB, меньшій большему; что невозможно. Чего ради AC, BD не пресѣкаются взаимно по поламъ. *3.

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели два круга взаимно пресѣкаются; то ихъ центръ не будетъ тотъже.

Пусть два круга ABC, CDG взаимно пресѣкутся въ точкахъ B, C. Говорю, что ихъ центръ не тотъже.

Ибо, буде возможно, пусть будетъ оный E: протяни EC; и проведи какъ ниесть прямую EFG.

Поелику точка E есть центръ круга ABC; то EC равна EF. Еще же, поелику точка E есть центръ круга CDG; то CE равна EG. А доказано, что EC равна и EF: посему FE равна EG, меньшая большей; что невозможно. Чего ради точка E не есть центръ круговъ ABC, CDG.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели два круга взаимно касаются внутри; то ихъ центръ не будетъ тотъже.

Пусть два круга ABC, CDE взаимно касаются въ точкѣ C. Говорю, что ихъ центръ не тотъже.

Ибо, буде возможно, пусть будетъ оный F: протяни FC; и проведи какъ ниесть прямую FEB.

Поелику точка F есть центръ круга ABC; то FC равна BF. Еще же, поелику точка F есть центръ круга CDE; то FC равна FE. А доказано, что FC равна и FB: посему FE равна FB, меньшая большей; что невозможно. Чего ради точка F не есть центръ круговъ ABC, CDE.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели на поперечникѣ круга взята будетъ какая ниесть точка, которая не есть центръ его, и отъ сей точки упадутъ въ кругѣ какія ниесть прямыя: то наибольшая будетъ та, на коей центръ, а наименьшая остальная; изъ другихъ же, ближайшая къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше дальнѣйшей; и токмо двѣ равныя прямыя отъ тойже точки могутъ упасть въ кругѣ, по обѣимъ сторонамъ наименьшей.

Пусть будетъ ABCD кругъ, и AD поперечникъ его; и на AD пусть будетъ взята какая ниесть точка F, которая не есть центръ круга; центръ же круга пусть будетъ E; и отъ F пусть упадутъ въ кругѣ ABCD какія ниесть прямыя FB, FC, FG. Говорю, что наибольшая есть FA, а най-

меньшая FD; изъ другихъ же FB больше FC, а FC больше FG.

Протяни BE, CE, GE.

Поелику всякаго треугольника двѣ сторо-
20,I. ны больше остальной, то EB, EF больше BF. Но AE равна BE; посему BE, EF равна AF: а посему AF больше BF. Еще же, поелику BE равна CE, а FE общая; то двѣ прямыя BE, EF равны двумъ прямымъ CE, EF; но уголъ BEF больше угла CEF: чего
24,I. ради основанїе BF больше основанїя CF. По тому же и CF больше GF.

20,I. Еще же, поелику GF, FE больше EG, а EG равна ED; посему GF, FE больше ED. Отними обще EF; посему остальная GF больше остальной FD. Итакъ найбольшая есть FA, а найменьшая FD; и FB больше FC, а FC больше FG.

Говорю такожъ, что отъ точки F токмо двѣ равныя прямыя могутъ упасть въ кругѣ ABCD, по обѣимъ сторонамъ найменьшей FD. При прямой EF, и при точкѣ на ней
23,I. E, составь уголъ FEH равный углу GEF; и протяни FH. Поелику GE равна EH, а EF общая; то двѣ прямыя GE, EF равны двумъ прямымъ HE, EF; и уголъ GEF равенъ углу HEF: посему основанїе FG равно основа-
4,I. нїю FH.

Говорю еще, что прямой FG другая равная прямая не можетъ упасть въ кругѣ отъ точки F. Ибо, буде возможно, пусть падаетъ таковая FK. Поелику же FK равна FG, а и FH равна FG; посему и FK равна HF, ближайшая къ проходящей чрезъ центръ равна дальнѣйшей; что невозможно.

Или и такъ. Протяни EK. Поелику GE равна EK, а EF общая, и основанїе FG равно основанїю FK; то уголъ GEF равенъ углу KEF*. Но уголъ GEF равенъ углу FEH; по- *8,I.
сему и уголъ FEH равенъ углу KEF, меньшїй большему; что невозможно. А посему отъ точки F не можетъ падать въ кругѣ другая прямая равная GF, слѣдственно можетъ токмо одна.

Итакъ, ежели на поперечникѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели внѣ круга взята будетъ какая ниесть точка, и отъ сей точки проведены будутъ къ кругу прямыя, одна изъ нихъ чрезъ центръ, а прочїя какъ ниесть: то изъ прямыхъ падающихъ на вогнутую окружность, наибольшая есть проходящая чрезъ центръ; изъ другихъ же ближайшая къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше

дальнѣйшей: А изъ прямыхъ падающихъ на выпуклую окружность, найменьшая есть та, которая между точкою и поперечникомъ; изъ другихъ же ближайшая къ найменьшей, всегда меньше дальнѣйшей: и токмо двѣ равныя падаютъ отъ точки къ кругу, по обѣимъ сторонамъ найменьшей.

Пусть будетъ ABC кругъ; и внѣ ABC пусть будетъ взята какая ниесть точка D; и отъ оной пусть будутъ проведены какія ниесть прямыя DA, DE, DF, DC, и изъ нихъ прямая DA чрезъ центръ. Говорю, что изъ сихъ прямыхъ, падающихъ на вогнутую окружность AEFC, найбольшая есть DA, проходящая чрезъ центръ; ближайшая же къ проходящей чрезъ центръ, всегда больше дальнѣйшей, то есть, DE больше DF, а DF больше DC: а изъ сихъ прямыхъ, падающихъ на выпуклую окружность HLKG, найменьшая есть DG, которая между точкою D и поперечникомъ AG; ближайшая же къ найменьшей DG, всегда меньше дальнѣйшей, то есть, DK меньше DL, а DL меньше DH.

1. Возьми центръ круга ABC, и пусть будетъ оный M; и протяни ME, MF, MC, MK, ML, MH.

Поелику AM равна EM, придай обще MD; посему AD равна EM, MD. Но EM, MD

больше ED; чего ради и AD больше ED. Еще же, поелику EM равна FM, а MD общая; то EM, MD равны FM, MD; а уголъ EMD больше угла FMD: посему основанїе ED больше основанїя FD*. Подобно докажемъ, что и FD больше CD. Итакъ найбольшая есть DA, а DE больше DF, и DF больше DC. *24,I.

И поелику MK, KD больше MD, и MG равна MK; то и остальная KD больше остальной GD; а посему и DG меньше DK: слѣдственно она есть найменьшая. Поелику же треугольника MLD, на одной изъ сторонъ его MD, составлены внутри двѣ прямыя MK, KD; то MK, KD меньше ML, LD*; а MK равна ML, посему остальная DK меньше остальной DL. Подобно докажемъ, что и DL меньше DH. Итакъ найменьшая, есть DG, а DK меньше DL, и DL меньше DH. *21,I.

Говорю такожъ, что отъ точки D двѣ токмо равныя прямыя могутъ упасть къ кругу, по обѣимъ сторонамъ найменьшей DG. При прямой MD, и при точкѣ на ней M, составь уголъ DMB равный углу KMD*; и протяни DB. Поелику MK равна MB, а MD общая; то двѣ прямыя KM, MD равны двумъ прямымъ BM, MD, каждая каждой; и уголъ KMD равенъ *23,I.

углу BMD: посему основанїе DK равно основанїю DB.

Говорю еще, что прямой DK равная другая прямая не можетъ упасть къ кругу отъ точки D. Ибо, буде возможно, пусть упадетъ, и пусть будетъ таковая DN. Поелику же DK равна DN, а DK равна и DB; посему и DB равна DN, ближайшая къ наименьшей DG равна дальнѣйшей; что, по доказанному, невозможно.

Или иначе. Протяни MN. Поелику KM равна MN, а MD общая, и основанїе DK равно основанїю DN; посему уголъ KMD равенъ углу NMD. Но уголъ KMD равенъ углу BMD; посему и уголъ BMD равенъ углу NMD, меньшїй большему; что невозможно. А посему отъ точки D, не больше какъ токмо двѣ равныя прямыя могутъ упасть къ кругу ABC, по обѣимъ сторонамъ наименьшей DG.

Итакъ, ежели внѣ круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Ежели внутри круга взята будетъ какая ниесть точка; и отъ сей точки въ кругѣ упадутъ больше нежели двѣ равныя прямыя: то взятая точка есть центръ круга.

Пусть будетъ ABC кругъ, и внутри его

точка D; и пусть отъ D въ кругѣ ABC упадутъ больше нежели двѣ равныя прямыя, какъ DA, DB, DC, Говорю, что точка D есть центръ круга ABC.

Протяни AB, BC; и раздѣли оныя по поламъ въ точкахъ E, F*; и протянувъ ED, *10,I.
FD, продолжи оныя къ точкамъ K, G, L, H.

Поелику AE равна EB, а ED общая; то двѣ прямыя AE, ED равны двумъ прямымъ BE, ED; и основанiе DA равно основанiю DB: посему уголъ AED равенъ углу BED. Чего ради каждый изъ угловъ AED, BED есть прямой; посему прямая HK разсѣкающая прямую AB по поламъ, разсѣкаетъ ее и подъ прямыми углами. Но естьли въ кругѣ какая ниесть прямая другую прямую разсѣкаетъ по поламъ и подъ прямыми углами; то на сѣкущей есть центръ круга*: посему на *слд:I.
GK есть центръ круга ABC. Потому же и на HL есть центръ круга ABC. Прямыя же GK, HL никакой другой общей точки не имѣютъ, кромѣ точки D; чего ради точка D есть центръ круга ABC.

Итакъ, ежели внутри круга, и проч. Ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Внутри круга ABC пусть будетъ взята какая ниесть точка D; и пусть отъ D, въ кругѣ ABC упадутъ больше нежели

двѣ равныя прямыя, какъ DA, DB, DC. Говорю, что взятая точка D есть центръ круга ABC.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ E; и протянувъ DE, продолжи оную къ точкамъ F, G: посему FG есть поперечникъ круга ABC. Поелику круга ABC на поперечникѣ FG взята нѣкая точка D, которая не есть центръ круга; то найбольшая будетъ DG, а DC больше DB, и
7. DB больше DA: но и равна ей, что невозможно; чего ради E не есть центръ круга ABC. Подобно докажемъ, что и ни другая какая ниесть, кромѣ D. Итакъ точка D есть центръ круга ABC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Кругъ не пресѣкаетъ другаго круга въ точкахъ больше двухъ.

Ибо, буде возможно, пусть кругъ ABC пресѣкаетъ другой кругъ DEF, въ точкахъ больше двухъ, какъ B, G, F, H. Протянувъ BH, BG, раздѣли оныя по поламъ въ точкахъ
10,1. K, L; и отъ K, L, проведя подъ прямыми
11,1. углами къ BH, BG, прямыя KC, LM, продолжи оныя къ точкамъ A, E.

Поелику въ кругѣ ABC нѣкая прямая AC

другую прямую BH разсѣкаетъ по поламъ, и подъ прямыми углами; то на AC есть центръ круга ABC*. Еще же, поелику въ *сл:1.
томъ же кругѣ ABC, нѣкая прямая NO другую прямую BG разсѣкаетъ по поламъ, и подъ прямыми углами; то на NO есть центръ круга ABC. А доказано, что и на AC; прямыя же AC, NO ни въ какой точкѣ взаимно не встрѣчаются, кромѣ P: посему точка P есть центръ круга ABC. Подобно докажемъ, что и круга DEF есть центръ P. Чего ради двухъ круговъ ABC, DEF, взаимно пресѣкающихся, будетъ центръ тотъ же P; что невозможно*. *5.

Итакъ кругъ не пресѣкаетъ, и пр. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Пусть опять кругъ ABC пресѣкаетъ другой кругъ DEF, въ точкахъ больше двухъ, какъ B, G, F. Возьми круга ABC центръ K; и протяни KB, KG, KF.

Поелику внутри круга DEF взята точка K, и отъ K въ кругѣ DEF падаютъ больше нежели двѣ равныя прямыя, какъ KB, KF, KG; то точка K есть центръ круга DEF*. Но и *9.
круга ABC есть центръ K: чего ради двухъ круговъ, взаимно пресѣкающихся, будетъ центръ тотъже K; что невозможно*. *5.

Итакъ кругъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Ежели два круга взаимно касаются внутри; и взяты будутъ ихъ центры: то прямая протянутая чрезъ ихъ центры, будучи продолжена, упадетъ на прикосновеніе круговъ.

Пусть два круга ABC, ADE взаимно касаются внутри, въ точкѣ A; и пусть взяты будутъ, круга ABC центръ F, а круга ADE центръ G. Говорю, что прямая протянутая отъ G къ F, будучи продолжена, упадетъ въ точку A.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, упадетъ какъ FGH. Протяни AF, AG.

20,1. Поелику AG, GF больше FA, то есть FH; отними обще FG: посему остальная AG больше остальной GH. Но AG равна DG: посему и GD больше GH, меньшая большей; что невозможно. А посему прямая протянутая отъ F къ G, не упадетъ внѣ прикосновенія A: слѣдственно упадетъ на оное.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ИНАЧЕ. Но еще пусть упадетъ какъ GFC: продолжи впрямъ съ GFC прямую къ точкѣ H; и протяни AG, AF.

Поелику AG, GF больше AF, а FA равна FC, то есть FH; отними обще FG: посему остальная AG больше остальной GH, то есть GD больше GH, меньшая большей; что невозможно. Подобно докажемъ, что сїе нелѣпо, естьли центръ круга большаго будетъ внѣ круга меньшаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели два круга взаимно касаются внѣ; то прямая протянутая чрезъ ихъ центры, пройдетъ чрезъ прикосновенїе.

Пусть два круга ABC, ADE взаимно касаются внѣ, въ точкѣ A; и пусть будетъ круга ABC центръ F, а круга ADE центръ G. Говорю, что прямая протянутая отъ F къ G, пройдетъ чрезъ прикосновенїе A.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, пройдетъ какъ FCDG. Протяни FA, AG.

Поелику точка F есть центръ круга ABC; то FA равна FC. Еще же, поелику точка G есть центръ круга ADE; то AG равна GD. А доказано, что FA равна FC; посему FA, AG равны FC, DG: а посему цѣлая FG больше FA, AG: но и меньше ея*; *20,1.

что невозможно. А посему прямая протянутая отъ F къ G, не пройдетъ не чрезъ прикосновенiе A: слѣдственно пройдетъ чрезъ оное.

Итакъ, ежели два круга, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XIII.

Кругъ не касается къ другому кругу въ точкахъ больше одной, хотя каснется внутри, хотя внѣ его.

Ибо, буде возможно, пусть кругъ ABDC каснется къ другому кругу EBFD, вопервыхъ внутри, въ точкахъ больше одной, какъ B, D.

Возьми круга ABDC центръ G, а круга
I. EBFD центръ H.

Итакъ прямая, протянутая отъ G къ H,
II. упадетъ въ точки B, D. Пусть упадетъ какъ BGHD. И поелику точка G есть центръ круга ABDC, то BG равна GD: посему BG больше HD; а посему BH гораздо больше HD. Еще же, поелику точка H есть центръ круга EBFD; то BH равна HD. А доказано, что она гораздо больше; что невозможно. Чего ради кругъ не касается къ другому кругу, внутри его, въ точкахъ больше одной.

Говорю еще, что и не касается внѣ. Ибо буде возможно, пусть кругъ ACK каснется къ

другому кругу ABCD внѣ, въ точкахъ больше одной, какъ A, C. Протяни AC.

Поелику на окружностяхъ обоихъ круговъ ABDC, ACK, взяты нѣкія двѣ точки A, C; то прямая протянутая чрезъ сіи точки, упадетъ внутри каждаго*. Но она падаетъ *2.
внутри круга ABDC, а внѣ круга ACK*; что *опр.3.
нелѣпо. Чего ради кругъ не касается къ другому кругу внѣ его, въ точкахъ больше одной. А доказано, что и ни внутри:

Итакъ кругъ не касается, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Въ кругѣ равныя прямыя равно отстоятъ отъ центра: и которыя прямыя равно отстоятъ отъ центра, суть взаимно равны.

Пусть будетъ ABDC кругъ, и пусть будутъ въ немъ равныя прямыя AB, CD. Говорю, что онѣ равно отстоятъ отъ центра.

Возьми центръ круга ABDC*, и пусть *1.
будетъ оный E; и отъ E проведи перпендикулярныя къ AB, CD, прямыя EF, EG*; и *12,1.
протяни AE, CE.

Поелику прямая EF, проходящая чрезъ центръ, прямую AB, непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то разсѣчетъ оную и по поламъ*: *3.

посему AF равна BF; а посему AB есть двукратная прямой AF. Потому же и CD есть двукратная прямой CG. Итакъ AB равна CD: посему и AF равна CG. И поелику AE равна EC; то квадратъ изъ AE равенъ квадрату изъ EC. Но квадрату изъ AE
47,1. равны квадраты изъ AF, FE, ибо уголъ при F есть прямой; квадрату же изъ EC равны квадраты изъ EG, GC, ибо уголъ при G есть прямой: посему квадраты изъ AF, FE равны квадратамъ изъ CG, GE. Но въ нихъ квадратъ изъ AF равенъ квадрату изъ CG, ибо AF равна CG: посему остальной квадратъ изъ FE равенъ остальному изъ EG; а посему FE равна EG. Въ кругѣ же прямыя называются равно отстоящими отъ центра; когда отъ центра проведенныя
опр. 4. перпендикулярныя къ нимъ равны: чего ради AB, CD равно отстоятъ отъ центра.

Но пусть прямыя AB, CD равно отстоятъ отъ центра, то есть, пусть будетъ EF равна EG. Говорю, что и AB равна CD.

Сдѣлавъ то же строенїе, подобно докажемъ, что AB есть двукратная прямой AF, а CD двукратная прямой CG. И поелику AE равна CE; то квадратъ изъ AE равенъ квадрату изъ CE. Но квадрату изъ AE равны квадраты изъ EF, FA; квадрату же изъ CE равны

квадраты изъ EG, GC: посему квадраты изъ EF, FA равны квадратамъ изъ EG, GC. Но въ нихъ квадратъ изъ EF равенъ квадрату изъ EG, ибо EF равна EG: посему остальной квадратъ изъ AF равенъ остальному изъ CG; а посему AF равна CG. Но прямой AF двукратная есть AB, а прямой CG двукратная CD; чего ради AB равна CD.

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Въ кругѣ найбольшая прямая есть поперечникъ; изъ другихъ же, ближайшая къ центру всегда больше дальнѣйшей.

Пусть будетъ ABCD кругъ; и пусть будетъ поперечникъ его AD, а центръ E; ближайшая же къ центру пусть будетъ BC, а дальнѣйшая FG. Говорю, что найбольшая есть AD, а BC больше FG.

Отъ центра E проведи, перпендикулярныя къ BC, FG, прямыя EH, EK*. Поелику ближайшая къ центру есть BC, а дальнѣйшая FG; то EK больше EH*. Положи прямую EL равную EH; и чрезъ L проведя подъ прямыми углами къ EK, прямую LM, продолжи оную къ N; и протяни EM, EN, EF, EG. *11,1. *опр.5.

Поелику EH равна EL; то и BC равна MN*. Еще же, поелику AE равна EM, и ED *14.

равна EN; то AD равна ME, EN. Но ME, EN больше MN; посему и AD больше MN. А MN равна BC; посему AD больше и BC. И поелику двѣ прямыя ME, EN равны двумъ прямымъ FE, EG; а уголъ MEN больше угла FEG:
24,1. посему основанїе MN больше основанїя FG. Но MN, по доказанному, равна BC, посему и BC больше FG. Чего ради, наибольшая есть поперечникъ AD, а BC больше FG.

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Прямая, проведенная отъ конца поперечника круга подъ прямыми къ оному углами, падаетъ внѣ круга: Въ пространствѣ же между прямою и окружностїю не можетъ упасть другая прямая: И уголъ полукружїя есть больше всякаго прямолинейнаго остраго угла; а остальной меньше.

Пусть будетъ ABC кругъ около центра D и поперечника AB. Говорю, что прямая, проведенная отъ A подъ прямыми углами къ AB, падаетъ внѣ круга.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, упадетъ внутри, какъ AC; и протяни DC.

Поелику DA равна DC; то уголъ DAC равенъ углу ACD*. Но уголъ DAC прямой; посему и уголъ ACD есть прямой: а посему треугольника ACD, два угла DAC, ACD равны двумъ прямымъ; что невозможно*. Посему прямая, проведенная отъ точки A подъ прямыми углами къ BA, не падаетъ внутри круга. Подобно докажемъ, что ни на окружность; слѣдственно падаетъ внѣ круга, какъ AE. *5. *17,1.

Говорю еще, что въ пространствѣ между прямою AE и окружностїю CHA неможетъ упасть другая прямая.

Ибо, буде возможно, пусть упадетъ, какъ FA. Отъ точки D проведи, перпендикулярную къ FA, прямую DG.

Поелику уголъ AGD прямой, а уголъ DAG меньше прямаго; то AD больше DG*. Но AD равна DH: посему DH больше DG, меньшая большей; что невозможно. Итакъ въ пространствѣ между прямою и окружностїю не можетъ упасть другая прямая. *19,1.

Говорю такожъ, что уголъ полукружїя, содержимый прямою BA и окружностїю CHA, есть больше всякаго прямолинейнаго остраго угла; а остальной, содержимый окружностїю CHA и прямою AE, меньше всякаго прямолинейнаго остраго угла.

Ибо, буде есть какой либо прямолинейной

уголъ, который больше содержимаго прямою ВА и окружностїю СНА, а меньше содержимаго окружностїю СНА и прямою АЕ; то въ пространствѣ между окружностїю СНА и прямою АЕ упадетъ прямая, которая сдѣлаетъ уголъ содержимый прямыми, больше угла содержимаго прямою ВА и окружностїю СНА, а меньше содержимаго окружностїю СНА и прямою АЕ. Но таковая не можетъ упасть; слѣдственно не можетъ быть такой острой уголъ содержимый прямыми который больше угла содержимаго прямою ВА и окружностїю СНА, ни такой, который меньше содержимаго окружностїю СНА и прямою АЕ. Что и доказать надлежало.

Слѣдствiе. Отсюда явствуетъ, что прямая проведенная отъ конца поперечника круга, подъ прямыми къ оному углами, касается къ кругу; и что прямая касается къ кругу только въ одной точкѣ. Ибо прямая встрѣчающая оный въ двухъ, упа-
2. детъ, по доказанному, внутри его. (26).

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XVII.

Отъ данной точки провести прямую линїю, касательную къ данному кругу.

Пусть будетъ А данная точка, а BCD

данный кругъ. Надлежитъ отъ точки A провести прямую линїю, касательную къ кругу BCD.

Возьми круга центръ E*; и протяни AE; и *1.
изъ центра E, разстоянїемъ EA напиши кругъ AFG; и отъ D проведи, подъ прямыми углами къ EA, прямую DF; и протяни EF, AB. Говорю, что отъ точки A проведена, касательная къ кругу BCD, прямая AB.

Поелику E есть центръ круговъ BCD, AFG: то EA равна EF и ED равна EB. Итакъ двѣ прямыя AE, EB равны двумъ прямымъ FE, ED; и содержатъ уголъ общїй при E: посему* основанїе DF равно основанїю *4,1.
AB; и треугольникъ EDF равенъ треугольнику EBA; и прочїе углы прочимъ угламъ, посему уголъ EDF равенъ углу EBA. Но уголъ EDF прямой; посему и уголъ EBA есть прямой: но EB есть прямая отъ центра; прямая же, проведенная отъ конца поперечника круга, подъ прямыми къ оному углами, касается къ кругу*: чего ради прямая AB есть ка- *сл:16.
сательная къ кругу.

Итакъ отъ данной точки A проведена, касательная къ данному кругу BCD, прямая линїя AB. ч. и с. н. (27).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели прямая касается къ кругу; и отъ центра къ прикосновенію протянута будетъ прямая: то протянутая прямая будетъ перпендикулярна къ касательной.

Пусть касается къ кругу ABC прямая DE въ точкѣ C; и пусть будетъ взятъ круга ABC центръ F; и отъ F къ C пусть будетъ протянута прямая FC. Говорю что FC перпендикулярна къ DE.

Ибо, буде нѣтъ; то отъ F проведи, перпендикулярную къ DE, прямую FG.

Поелику уголъ FGC прямой; то уголъ FCG
17,1. есть острой: а большему углу противу-
19,1. лежитъ большая сторона; посему FC больше FG. Но FC равна FB: посему и FB больше FG, меньшая большей; что невозможно. А посему FG не перпендикулярна къ DE. Подобно докажемъ, что и ни другая какая ниесть, кромѣ FC; чего ради FC перпендикулярна къ DE.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели прямая касается къ кругу; и отъ прикосновенія проведена будетъ прямая, подъ прямыми углами къ касательной: то на проведенной прямой будетъ центръ круга.

Пусть касается къ кругу ABC прямая DE въ точкѣ C; и пусть будетъ отъ C проведена, подъ прямыми углами къ DE, прямая CA. Говорю, что на AC есть центръ круга.

Ибо, естьли нѣтъ; то пусть, буде возможно, будетъ оный F. Протяни CF.

Поелику прямая DE касается къ кругу ABC, и отъ центра къ прикосновенію протянута прямая FC; то FC перпендикулярна къ DE*: *18. посему уголъ FCE есть прямой. А и уголъ ACE прямой: посему уголъ FCE равенъ углу ACE, меньшій большему; что невозможно. Чего ради F не есть центръ круга ABC. Подобно докажемъ, что и ни другая какая либо точка, развѣ которая на AC.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н. (28).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Въ кругѣ, уголъ при центрѣ есть двукратный угла при окружности, когда они ту же дугу имѣютъ основаніемъ.

Пусть будетъ ABC кругъ; и при центрѣ его пусть будетъ уголъ BEC, а при окружности уголъ BAC, кои пусть имѣютъ ту же дугу BC основаніемъ. Говорю, что уголъ BEC есть двукратный угла BAC.

Протянувъ AE, продолжи оную къ F.

Поелику EA равна EB; то уголъ EAB равенъ углу EBA: посему углы EAB, EBA суть двукратны угла EAB. Но уголъ BEF
32,1. равенъ угламъ EAB, EBA; посему и уголъ BEF есть двукратный угла EAB. Потому же и уголъ FEC есть двукратный угла EAC. Чего ради цѣлой уголъ BEC есть двукратный цѣлаго угла BAC.

Наклони уголъ BAC, и пусть будетъ другой уголъ BDC. Протянувъ DE, продолжи оную къ G: то подобно же докажемъ, что уголъ GEC есть двукратный угла GDC. Но въ нихъ уголъ GEB есть двукратный угла GDB; чего ради остальной уголъ BEC есть двукратный остальнаго BDC.

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Въ кругѣ, въ томъ же отрѣзкѣ углы взаимно равны.

Пусть будетъ ABCD кругъ; и въ его отрѣзкѣ BAED пусть будутъ углы BAD, BED. Говорю, что углы BAD, BED взаимно равны.

1. Возьми круга ABCD центръ, и пусть будетъ оный F; и протяни BF, FD.

Поелику уголъ BFD есть при центрѣ, а уголъ BAD при окружности, и имѣютъ ту

же дугу BCD основанїемъ; то уголъ BFD есть двукратный угла BAD*. Потому же уголъ BFD есть двукратный и угла BED. Чего ради уголъ BAD равенъ углу BED. *20.

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Въ кругахъ, четыреугольниковъ противулежащїе углы равны двумъ прямымъ.

Пусть будетъ ABCD кругъ; и въ немъ пусть будетъ четыреугольникъ ABCD. Говорю, что его противулежащїе углы равны двумъ прямымъ.

Протяни AC, BD.

Поелику всякаго треугольника три угла равны двумъ прямымъ*; то треугольника ABC три угла CAB, ABC, BCA равны двумъ прямымъ. Но углу BAC равенъ уголъ CDB*, ибо они въ томъже отрѣзкѣ BADC; а углу ADB, равенъ уголъ ACB, ибо они въ томъже отрѣзкѣ ADCB: посему цѣлой уголъ ADC равенъ угламъ BAC, ACB. Придай обще уголъ ABC; посему углы ABC, BAC, ACB равны угламъ ABC, ADC. Но углы ABC, BAC, ACB равны двумъ прямымъ; чего ради и углы ABC, ADC равны двумъ прямымъ. Подобно докажемъ, что и углы BAD, DCB равны двумъ прямымъ. *32, I. *21.

Итакъ въ кругахъ, и проч. ч. и д. н. (29).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

На тойже прямой и по ту же ея сторону, не могутъ быть составлены два отрѣзка круговъ подобные и неравные.

Ибо, буде возможно, пусть на той же прямой AB и по ту же ея сторону, будутъ составлены два отрѣзка круговъ подобные и неравные ACB, ADB.

Проведи ACD; и протяни CB, DB.

Поелику отрѣзокъ ACB подобенъ отрѣзку ADB; подобные же отрѣзки круговъ суть
опр.11. тѣ, кои вмѣщаютъ равные углы: то уголъ ACB равенъ углу ADB, внѣшный внутрен-
16,I. нему; что невозможно.

Итакъ на тойже прямой, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

На равныхъ прямыхъ, подобные отрѣзки круговъ взаимно равны.

Пусть будутъ на равныхъ прямыхъ AB, CD подобные круговъ отрѣзки AEB, CFD. Говорю, что отрѣзокъ AEB равенъ отрѣзку CFD.

Ибо, естьли помѣстить отрѣзокъ AEB на отрѣзокъ CFD, и положить точку A на точку C, а прямую AB на прямую CD: то точка B совмѣстится съ точкою D, поели-

ку AB равна CD. Когда же AB совмѣстилась съ CD, то и отрѣзокъ AEB совмѣстится съ отрѣзкомъ CFD. Ибо, естьли по совмѣщенiи прямой AB съ прямою CD, отрѣзокъ AEB не совмѣстится съ отрѣзкомъ CFD: то пусть перемѣнитъ положенiе, какъ CHGD. Но кругъ не пресѣкаетъ другаго круга въ точкахъ больше двухъ*; а *10.
кругъ CHGD пресѣчетъ кругъ CFD больше нежели въ двухъ точкахъ, въ C, G, D: что невозможно. Посему, когда прямая AB совмѣстилась съ прямою CD, не можетъ несовмѣститься отрѣзокъ AEB съ отрѣзкомъ CFD; слѣдственно совмѣститься, и будетъ равенъ ему.

Итакъ на равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXV.

Дописать кругъ, коего отрѣзокъ данъ.

Пусть будетъ ABC данный отрѣзокъ круга. Надлежитъ дописать кругъ, коего ABC есть отрѣзокъ.

Раздѣли AC по поламъ въ D*; и отъ точки *10,I.
D проведи, подъ прямыми углами къ AC, прямую DB*; и протяни AB. Итакъ уголъ *11,I.
ABD или больше угла BAD, или равенъ ему, или меньше его.

Пусть будетъ, вопервыхъ, больше. При прямой BA, и при точкѣ на ней A, составь
23,1. уголъ BAE равный углу ABD; и продолжи DB къ E; и протяни EC. Поелику же уголъ ABE равенъ углу BAE; то и прямая BE
6,1. равна прямой EA. И поелику AD равна DC, а DE общая; то двѣ прямыя AD, DE равны двумъ прямымъ CD, DE, каждая каждой; и уголъ ADE равенъ углу CDE, ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основанїе AE равно основанїю CE. Но AE, по доказанному, равна EB; посему и BE равна CE; слѣдственно три AE, EB, EC взаимно равны: а посему кругъ, изъ центра E и разстоянїемъ которой ниесть изъ прямыхъ AE, EB, EC написан-
9. ный, пройдетъ чрезъ прочїя точки; и такъ кругъ, коего отрѣзокъ данъ, будетъ дописанъ. Притомъ явно, что отрѣзокъ ABC будетъ меньше полукружїя; поелику центръ E падаетъ внѣ отрѣзка.

Подобно, естьли уголъ ABD равенъ углу BAD, то сдѣлана прямая AD, равная каждой изъ прямыхъ BD, DC: посему три DA, DB, DC будутъ взаимно равны, и D будетъ центръ дополненнаго круга; притомъ же ABC будетъ полукружїе.

Естьли же уголъ ABD меньше угла BAD; и естьли при прямой BA, и при точкѣ на

ней A, составимъ уголъ равный углу ABD: то центръ упадетъ внутри отрѣзка ABC, на прямой DB; и притомъ отрѣзокъ ABC будетъ больше полукружія.

Итакъ дописанъ кругъ, коего отрѣзокъ данъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Въ равныхъ кругахъ, равные углы стоятъ на равныхъ дугахъ, хотя будутъ стоять при центрахъ, хотя при окружностяхъ.

Пусть будутъ ABC, DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ при центрахъ равные углы BGC, EHF, а при окружностяхъ углы BAC, EDF. Говорю, что дуга BKC равна дугѣ ELF.

Протяни BC, EF.

Поелику круги ABC, DEF равны, то и прямыя изъ центровъ ихъ равны*; и такъ *опр. I.
двѣ прямыя BG, GC равны двумъ прямымъ EH, HF; и уголъ при G равенъ углу при H: посему основаніе BC равно основанію EF. И поелику уголъ при A равенъ углу при D; то отрѣзокъ BAC подобенъ отрѣзку EDF*, и *опр. II.
суть на равныхъ прямыхъ BC, EF. На равныхъ же прямыхъ, подобные отрѣзки круговъ, взаимно равны*; посему отрѣзокъ *24.

BAC равенъ отрѣзку EDF. А и цѣлый кругъ ABC равенъ цѣлому кругу DEF; посему остальной отрѣзокъ BKC равенъ остальному отрѣзку ELF: чего ради дуга BKC равна дугѣ ELF.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Въ равныхъ кругахъ, на равныхъ дугахъ стоящіе углы взаимно равны, хотя будутъ стоять при центрахъ, хотя при окружностяхъ.

Пусть въ равныхъ кругахъ ABC, DEF, и на равныхъ дугахъ BC, EF, будутъ стоять при центрахъ G, H, углы BGC, EHF, а при окружностяхъ углы BAC, EDF. Говорю, что уголъ BGC равенъ углу EHF; а уголъ BAC углу EDF.

Ибо, естьли уголъ BGC равенъ углу EHF;
20. то явно, что и уголъ BAC равенъ углу EDF. Естьли же нѣтъ; то одинъ изъ нихъ большій: пусть будетъ уголъ BGC большій. При прямой BG, и при точкѣ на ней G, составь уголъ BGK равный углу EHF. И поелику равные углы стоятъ на рав-
26. ныхъ дугахъ, когда они при центрахъ; то дуга BK равна дугѣ EF. Но EF равна

BC: посему и BK равна BC, меньшая большей; что невозможно. А посему уголъ BGC не неравенъ углу EHF; слѣдственно равенъ. Но угла BGC есть половина уголъ при A, а угла EHF есть половина уголъ при D; чего ради и уголъ при A равенъ углу при D.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н. (30).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Въ равныхъ кругахъ, равныя прямыя отнимаютъ равныя дуги, большую дугу равную большей, а меньшую меньшей.

Пусть будутъ ABC, DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ AB, DE равныя прямыя, кои отнимаютъ дуги ACB, DFE большія, а AGB, DHE меньшія. Говорю, что большая дуга ACB равна большей дугѣ DFE, а меньшая дуга AGB равна меньшей DHE.

Возьми круговъ центры K, L*; и протяни *1.
AK, KB, DL, LE.

Поелику круги равны, то и прямыя изъ центровъ ихъ равны. Итакъ двѣ прямыя AK, KB равны двумъ прямымъ DL, LE; и основаніе AB равно основанію DE: посему уголъ AKB равенъ углу DLE. Равные же углы стоятъ на равныхъ дугахъ, когда

26. они при центрахъ; посему дуга AGB равна дугѣ DHE. А и цѣлый кругъ ABC равенъ цѣлому кругу DEF: чего ради и остальная дуга ACB равна остальной дугѣ DFE.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Въ равныхъ кругахъ, равныя дуги стягиваются равными прямыми.

Пусть будутъ ABC, DEF равные круги; и въ нихъ пусть будутъ взяты равныя дуги BGC, EHF, и протянуты прямыя BC, EF. Говорю, что прямая BC равна прямой EF.

1. Возьми круговъ центры, и пусть будутъ оные K, L; и протяни BK, KC, EL, LF.

Поелику дуга BGC равна дугѣ EHF; то и
27. уголъ BKC равенъ углу ELF. И поелику круги ABC, DEF равны; то и прямыя изъ центровъ ихъ равны. Итакъ двѣ прямыя BK, KC равны двумъ прямымъ EL, LF, и содержатъ равные углы; посему основаніе BC равно основанію EF.

Итакъ въ равныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Данную дугу раздѣлить по поламъ.

Пусть будетъ ADB данная дуга. Надлежитъ дугу ADB раздѣлить по поламъ.

Протяни AB; и раздѣли оную по поламъ въ C*; и отъ точки C проведи, подъ пря- *10,I.
мыми углами къ AB, прямую CB*; и про- *11,I.
тяни AD, DB.

Поелику AC равна CB, а CD общая; то двѣ прямыя AC, CD равны двумъ прямымъ BC, CD; и уголъ ACD равенъ углу BCD, ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основанїе AD равно основанїю DB. Равныя же прямыя отнимаютъ равныя дуги, большую дугу равную большей, а меньшую меньшей*; и каждая изъ *28.
дугъ AD, DB есть меньше полукружїя: чего ради дуга AD равна дугѣ DB.

Итакъ данная дуга раздѣлена по поламъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Въ кругѣ, уголъ въ полукружїи есть прямой, въ отрѣзкѣ же большемъ полукружїя уголъ меньше прямаго; а въ отрѣзкѣ меньшемъ уголъ больше прямаго. И еще, уголъ большаго отрѣзка есть больше прямаго; а уголъ меньшаго отрѣзка меньше прямаго.

Пусть будетъ ABCD кругъ; и пусть будетъ BC его поперечникъ, а E центръ; и протяни BA, AC, AD, DC. Говорю, что въ

полукружїи BAC уголъ BAC есть прямой; въ отрѣзкѣ же ABC большемъ полукружїя уголъ ABC меньше прямаго; а въ отрѣзкѣ ADC меньшемъ полукружїя уголъ ADC больше прямаго.

Протяни AE; и продолжи BA къ F.

Поелику BE равна EA; то уголъ ABE равенъ углу BAE. Еще же, поелику CE равна EA; то уголъ ACE равенъ углу CAE. Посему цѣлый уголъ BAC равенъ двумъ угламъ ABC, ACB. Но и уголъ FAC, какъ внѣшный треугольника ABC, равенъ двумъ
32,1. угламъ ABC, ACB; посему уголъ BAC равенъ углу FAC; а посему каждый изъ нихъ есть прямой. Чего ради въ полукружїи BAC уголъ BAC есть прямой.

И поелику треугольника ABC два угла ABC,
17,1. BAC меньше двухъ прямыхъ; и уголъ BAC есть прямой: то уголъ ABC меньше прямаго; и онъ въ отрѣзкѣ ABC большемъ полукружїя.

И поелику ABCD есть четыреугольникъ къ кругѣ; а въ кругахъ, четыреугольниковъ
22. противулежащїе углы равны двумъ прямымъ: посему углы ABC, ADC равны двумъ прямымъ. Но уголъ ABC меньше прямаго: чего ради остальной уголъ ADC есть больше прямаго; и онъ въ отрѣзкѣ ADC меньшемъ полукружїя.

Говорю еще, что уголъ большаго отрѣзка, содержимый дугою ABC и прямою AC, есть больше прямаго; а уголъ меньшаго отрѣзка, содержимый дугою ADC и прямою AC, есть меньше прямаго. Сїе очевидно: Ибо, какъ уголъ содержимый прямыми BA, AC есть прямой; то содержмый дугою ABC и прямою AC есть больше прямаго. Еще же, поелику уголъ содержимый прямыми AC, AF есть прямой; то содержимый прямою CA и дугою ACD меньше прямаго.

Итакъ въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

Иначе. Доказывается, что уголъ BAC прямой. Поелику уголъ AEC есть двукратный угла BAE, ибо равенъ двумъ внутреннымъ противулежащимъ; а и уголъ AEB есть двукратный угла EAC: посему углы AEB, AEC суть двукратные угла BAC. Но углы AEB, AEC равны двумъ прямымъ*; чего *13,1.
ради уголъ BAC есть прямой. ч. и д. н.

Слѣдствие. Отсуда явствуетъ, что естьли въ треугольникѣ одинъ уголъ равенъ двумъ прочимъ; то оный уголъ будетъ прямой, ибо и его смѣжный равенъ тѣмъ же угламъ. А когда смѣжные углы равны, то они суть прямые.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Ежели прямая касается къ кругу, и отъ прикосновенія проведена будетъ въ кругѣ какая ниесть прямая сѣкущая сей кругъ: то углы, которые она дѣлаетъ при касательной, будутъ равны угламъ въ накосьлежащихъ отрѣзкахъ круга.

Пусть къ кругу ABCD касается прямая EF въ точкѣ B; и отъ точки B пусть проведена будетъ въ кругѣ ABCD прямая BD, сѣкущая оный. Говорю, что углы, которые BD дѣлаетъ съ касательною EF, равны угламъ въ накосьлежащихъ отрѣзкахъ круга, то есть, что уголъ FBD равенъ углу въ отрѣзкѣ BAD составленному, а уголъ DBE равенъ углу въ отрѣзкѣ DCB.

Проведи отъ B, подъ прямыми углами къ EF, прямую BA; и возьми на дугѣ BD какую ниесть точку C; и протяни AD, DC, CB.

Поелику къ кругу ABCD касается прямая EF въ точкѣ B, и отъ прикосновенія B проведена, подъ прямыми углами къ касательной, прямая BA: то на BA есть центръ
19. круга ABCD; почему BA есть поперечникъ круга ABCD. Слѣдственно уголъ ADB, въ
31. полукружіи составленный, есть прямой; посему остальные углы BAD, ABD « тре-

угольника ABD » равны одному прямому. И уголъ ABF прямой же; посему уголъ ABF равенъ угламъ BAD, ABD. Отними обще уголъ ABD; посему остальной уголъ DBF равенъ углу BAD въ накосьлежащемъ отрѣзкѣ круга. И поелику ABCD есть четыреугольникъ въ кругѣ; то противулежащіе его углы равны двумъ прямымъ*. А и углы DBF, *22.
DBE равны двумъ прямымъ; посему углы DBF, DBE равны угламъ BAD, BCD. Но въ нихъ уголъ BAD равенъ, по доказанному, углу DBF; чего ради остальной уголъ DBE равенъ углу DCB въ накосьлежащемъ отрѣзкѣ DCB круга.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

На данной прямой написать отрѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ AB данная прямая, а C данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ на данной прямой AB написать отрѣзокъ круга, вмѣщающій уголъ равный углу C. Уголъ же C есть или острой, или прямой, или тупой.

Пусть будетъ, вопервыхъ, острой, какъ въ первой фигурѣ. При прямой AB, и при

23,1. точкѣ A, составь уголъ BAD равный углу C: посему и уголъ BAD есть острой. Проведи отъ точки A, подъ прямыми углами къ AD,
11,1. прямую AE; и раздѣли AB по поламъ въ F; и проведи отъ точки F, подъ прямыми углами къ AB, прямую FG; и протяни GB. Поелику AF равна FB, а FG общая; то двѣ прямыя AF, FG равны двумъ прямымъ FB, FG; и уголъ AFG равенъ углу BFG: посему основанїе AG равно основанїю GB. Слѣдственно кругъ, изъ центра G и разстоянїемъ GA написанный, пройдетъ и чрезъ B. Напиши сей кругъ; и пусть онъ будетъ ABE; и протяни BE. Поелику отъ конца A поперечника AE проведена, подъ прямыми углами къ AE, прямая AD; то AD касательна къ
16. кругу. И поелику къ кругу ABE касается прямая AD; и отъ прикосновенїя A проведена въ кругѣ ABE прямая AB: то уголъ DAB равенъ уг-
32. лу AEB, въ накосьлежащемъ отрѣзкѣ круга. Но уголъ DAB равенъ углу C; посему и уголъ C равенъ углу AEB. Итакъ на данной прямой AB написанъ отрѣзокъ круга AEB, вмѣщающїй уголъ AEB равный данному углу C.

Но пусть будетъ уголъ C прямой; и пусть надлежитъ еще на AB написать отрѣзокъ круга, вмѣщающїй уголъ равный прямому C. Составь еще уголъ BAD равный

прямому углу C, какъ значится на второй фигурѣ; и раздѣли AB по поламъ въ F; и изъ центра F, разстоянїемъ которой ниесть изъ прямыхъ FA, FB, напиши кругъ AEB. Итакъ прямая AD касательна къ кругу ABE*, по причинѣ, что уголъ *16.
при A есть прямой: и уголъ BAD равенъ углу въ отрѣзкѣ AEB; поелику и сей уголъ есть прямой*, ибо находится въ полукружїи. Но *31.
уголъ BAD равенъ углу C; посему и уголъ въ отрѣзкѣ AEB равенъ углу C. Итакъ на AB еще написанъ отрѣзокъ круга AEB, вмѣщающїй уголъ равный углу C.

Но еще пусть будетъ уголъ C тупой. Составь при прямой AB и при точкѣ A, сему углу равный, уголъ BAD, какъ значится на третьей фигурѣ; и проведи, подъ прямыми углами къ AD, прямую AE; и раздѣли опять AB по поламъ въ F; и проведи, подъ прямыми углами къ AB, прямую FG; и протяни GB. Поелику опять AF равна FB, а FG общая; то двѣ прямыя AF, FG равны двумъ прямымъ BF, FG; и уголъ AFG равенъ углу BFG: посему основанїе AG равно основанїю BG. Слѣдственно кругъ, изъ центра G и разстоянїемъ GA написанный, пройдетъ и чрезъ B. Пусть проходитъ какъ AEB. Поелику же къ поперечнику AE, отъ конца его, проведена

подъ прямыми углами, прямая AD; то AD
16. касательна къ кругу AEB: и отъ прикосновенія, что въ A, проведена прямая AB; посему уголъ BAD равенъ углу составленному въ на-
32. косьлежащемъ круга отрѣзкѣ AHB. Но уголъ BAD равенъ углу C; посему и уголъ въ отрѣзкѣ AHB равенъ углу C.

Итакъ на данной прямой AB написанъ отрѣзокъ круга AHB, вмѣщающій уголъ равный углу C. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Отъ даннаго круга отнять отрѣзокъ, вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а D данный прямолинейный уголъ. Надлежитъ отъ круга ABC отнять отрѣзокъ, вмѣщающій уголъ равный углу D.

Проведи къ кругу ABC касательную EF
17. въ точкѣ B; и составь при прямой EF, и при данной на ней точкѣ B, уголъ FBC равный углу D.

Поелику къ кругу ABC касается прямая EF, и отъ прикосновенія B проведена прямая BC; то уголъ FBC равенъ углу составлен-
32. ному въ BAC, въ накосьлежащемъ отрѣзкѣ.

Но уголъ FBC равенъ углу D; посему и уголъ въ отрѣзкѣ BAC равенъ углу D.

Итакъ отъ даннаго круга ABC отнятъ отрѣзокъ BAC, вмѣщающій уголъ равный данному прямолинейному углу D. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Ежели въ кругѣ двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то прямоугольникъ содержимый въ отрѣзкахъ одной равенъ прямоугольнику содержимому въ отрѣзкахъ другой.

Пусть въ кругѣ ABCD, двѣ прямыя AC, BD, взаимно пресѣкутся въ точкѣ E. Говорю, что прямоугольникъ въ AE, EC равенъ прямоугольнику въ DE, EB.

Ежели прямыя AC, BD проходятъ чрезъ центръ, такъ что E будетъ центръ круга ABCD; то явно, что по равенству прямыхъ AE, EC, DE, EB, и прямоугольникъ въ AE, EC равенъ прямоугольнику въ DE, EB.

Но пусть прямыя AC, DB не проходятъ чрезъ центръ. Возьми центръ круга ABCD*, и *1.
пусть будетъ оный F; и отъ F проведи, перпендикулярныя къ AC, DB, прямыя FG, FH; и протяни FB, FC, FE.

Поелику прямая FG, проходящая чрезъ центръ, прямую AC, непроходящую чрезъ

центръ, разсѣкаетъ подъ прямыми углами;
3. то разсѣчетъ оную и по поламъ: посему AG равна GC. И поелику прямая AC разсѣчена на равныя въ G, и на неравныя въ E; то прямоугольникъ въ AE, EC, вмѣстѣ съ квадратомъ
5,II. изъ GE, равенъ квадрату изъ GC. Придай обще квадратъ изъ GF; посему прямоугольникъ въ AE, EC, вмѣстѣ съ квадратами изъ FG, GE, равенъ квадратамъ изъ CG, GF. Но квадратамъ изъ EG, GF равенъ квадратъ
47,I. изъ FE; квадратамъ же изъ CG, GF равенъ квадратъ изъ FC: посему прямоугольникъ въ AE, EC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE, равенъ квадрату изъ FC. Но FC равна FB; посему прямоугольникъ въ AE, EC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EF, равенъ квадрату изъ FB. Потому же и прямоугольникъ въ DE, EB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE, равенъ квадрату изъ FB. А доказано, что и прямоугольникъ въ AE, EC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE, равенъ квадрату изъ FB: посему прямоугольникъ въ AE, EC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE, равенъ прямоугольнику въ DE, EB, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FE. Отними обще квадратъ изъ FE; посему остальной прямоугольникъ въ AE, EC равенъ прямоугольнику въ DE, EB.

Итакъ, ежели въ кругѣ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Ежели внѣ круга взята будетъ какая ниесть точка; и отъ нея на кругъ упадутъ двѣ прямыя, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему касается: то прямоугольникъ, содержимый въ цѣлой и въ прямой, которая внѣ круга между точкою и выпуклою окружностію, равенъ квадрату изъ касательной.

Внѣ круга ABC пусть будетъ взята какая ниесть точка D; и отъ D на кругъ ABC пусть упадутъ двѣ прямыя DCA, DB; и пусть прямая DCA пресѣкаетъ кругъ ABC, а DB къ нему касается. Говорю, что прямоугольникъ въ AD, DC равенъ квадрату изъ DB. Прямая DCA или проходитъ чрезъ центръ, или нѣтъ.

Пусть, вопервыхъ, проходитъ чрезъ центръ, и пусть будетъ F центръ круга ABC; и протяни FB. Итакъ уголъ FBD есть прямой*. И поелику прямая AC разсѣчена по *18.
поламъ въ F, и приложена къ ней прямая CD; то прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FC, равенъ квадрату изъ FD*. Но FC равна FB; посему *6,II.
прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FB, равенъ квадрату изъ FD.

Квадратъ же изъ FD равенъ квадратамъ
47,I. изъ FB, BD, ибо уголъ FBD есть прямой: посему прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FB, равенъ квадратамъ изъ FB, BD. Отними обще квадратъ изъ FB; чего ради остальной прямоугольникъ въ AD, DC равенъ квадрату изъ касательной DB.

Но пусть прямая DCA и не проходитъ чрезъ центръ круга ABC. Возьми его центръ
1. E; и отъ E проведи, перпендикулярную къ AC, прямую EF; и протяни EB, EC, ED. Итакъ уголъ EFD есть прямой. И поелику прямая EF, проходящая чрезъ центръ, прямую AC, непроходящую чрезъ центръ, разсѣкаетъ подъ прямыми углами; то раз-
3. сѣчетъ оную и по поламъ: посему AF равна FC. И поелику прямая AC разсѣчена по поламъ въ F; и приложена къ ней прямая CD: то прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ FC, равенъ ква-
6,II. драту изъ FD. Придай обще квадратъ изъ FE; посему прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратами изъ CF, FE, равенъ квадратамъ изъ DF, FE. Но квадратамъ изъ DF, FE равенъ квадратъ изъ DE, ибо уголъ EFD есть прямой; а квадратамъ изъ CF, FE равенъ квадратъ изъ CE: по-

сему прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EC, равенъ квадрату изъ ED. Но EC равна EB; посему прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EB, равенъ квадрату изъ ED. Квадрату же изъ ED равны квадраты изъ EB, BD, ибо уголъ EBD есть прямой; посему прямоугольникъ въ AD, DC, вмѣстѣ съ квадратомъ изъ EB, равенъ квадратамъ изъ EB, BD. Отними обще квадратъ изъ EB; чего ради остальной прямоугольникъ въ AD, DC равенъ квадрату изъ DB.

Итакъ, ежели внѣ круга, и пр. ч. и д. н. (31).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Ежели внѣ круга взята будетъ какая ниесть точка; и отъ нее на кругъ упадутъ двѣ прямыя, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему падаетъ; и будетъ прямоугольникъ въ цѣлой сѣкущей и въ прямой, которая внѣ круга между точкою и выпуклою окружностію, равенъ квадрату изъ падающей: то падающая будетъ касаться къ кругу.

Внѣ круга ABC пусть будетъ взята какая ниесть точка D; и отъ D на кругъ ABC пусть упадутъ двѣ прямыя DCA, DB;

и пусть прямая DCA пресѣкаетъ кругъ, а DB къ нему падаетъ; и пусть прямоугольникъ въ AD, DC равенъ квадрату изъ DB. Говорю, что DB касается къ кругу ABC.

17. Проведи къ кругу ABC касательную DE;
1. и возьми круга ABC; центръ F и протяни FE, FB, FD.

18. Итакъ уголъ FED есть прямой. И поелику DE касается къ кругу ABC, и DCA пресѣкаетъ оный; то прямоугольникъ въ
36. AD, DC равенъ квадрату изъ DE. Предполагается же, что прямоугольникъ въ AD, DC равенъ квадрату изъ DB; посему квадратъ изъ DE равенъ квадрату изъ DB; а посему DE равна DB: А и FE равна FB; итакъ двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ DB, BF; и основанїе FD имъ общее: посему уголъ DEF равенъ углу DBF. Но уголъ DEF прямой; посему и уголъ DBF есть прямой. Прямая же BF, продолженная есть поперечникъ; а прямая, проведенная отъ конца поперечника, подъ прямыми къ нему угла-
16. ми, касается къ кругу; посему DB касается къ кругу ABC. Подобно же докажемъ, естьли центръ будетъ и на AC.

Итакъ, ежели внѣ круга, и проч. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА IV.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Прямолинейная фигура называется вписанною въ другой прямолинейной фигурѣ, когда каждый изъ угловъ вписываемой фигуры прикасается къ каждой сторонѣ той, въ которой вписывается.

2. Подобно, фигура называется описанною около другой фигуры, когда каждая сторона описываемой фигуры прикасается къ каждому углу той, около которой описывается.

3. Прямолинейная фигура называется вписанною въ кругѣ, когда каждый уголъ вписываемой фигуры прикасается къ окружности круга.

4. А прямолинейная фигура называется описанною около круга, когда каждая сторона описываемой фигуры касается къ окружности круга.

5. Подобно, кругъ въ прямолинейной фигурѣ называется вписаннымъ, когда окружность круга касается къ каждой сторонѣ фигуры, въ которой вписывается.

6. Кругъ же называется описаннымъ около прямолинейной фигуры, когда окружность круга прикасается къ каждому углу фигуры, около которой описывается.

7. Прямая называется помѣщенною въ кругѣ, когда концы ея суть на окружности круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Въ данномъ кругѣ помѣстить прямую равную данной прямой, которая не больше поперечника онаго круга.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а D данная прямая, которая не больше поперечника онаго круга. Надлежитъ въ кругѣ ABC помѣстить прямую равную прямой D.

1,III. Круга ABC проведи поперечникъ BC. И ежели BC равна D; то предложенное сдѣ-
опр.7. лано, ибо въ кругѣ ABC помѣщена прямая

BC равная D. Естьли же BC больше D: то положи прямую CE равную D*; и изъ центра C, разстоянїемъ CE, напиши кругъ AEF; и протяни CA. *3,I.

Поелику точка C есть центръ круга AEF, то CA равна CE. Но D равна CE; чего ради D равна и CA.

Итакъ въ данномъ кругѣ ABC помѣщена прямая CA равная данной прямой D, которая не больше поперечника онаго круга. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Въ данномъ кругѣ вписать треугольникъ равноугольный данному треугольнику.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а DEF данный треугольникъ. Надлежитъ въ кругѣ ABC вписать треугольникъ равноугольный треугольнику DEF.

Проведи прямую GH, касательную къ кругу ABC въ точкѣ A*; и составь при прямой AH, и при точкѣ на ней A, уголъ HAC равный углу DEF*; и еще при прямой GA, и при точкѣ на ней A, уголъ GAB равный углу FDE; и протяни BC. *17,III. *23,I.

Поелику прямая GA касается къ кругу ABC; и отъ прикосновенїя проведена въ кругѣ прямая AC: то уголъ GAC равенъ углу въ

нако сьлежащемъ отрѣзкѣ круга, то есть углу
32,III. ABC. Но уголъ GAC, равенъ и углу DEF; посему и уголъ ABC равенъ углу DEF. Потому же и уголъ ACB равенъ углу FDE: слѣдственно и остальной уголъ BAC равенъ остальному
32,I. EFD. Чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF, и впи-
опр.3. санъ въ кругѣ ABC.

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ треугольникъ равноугольный данному треугольнику Ч. И С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Около даннаго круга описать треугольникъ равноугольный данному треугольнику.

Пусть будетъ ABC данный кругъ, а DEF данный треугольникъ. Надлежитъ около круга ABC описать треугольникъ равноугольный треугольнику DEF.

Продолжи EF на обѣ стороны къ точ-
1,III. камъ G, H; возьми круга ABC центръ K; и проведи какъ ниесть прямую KB; при прямой KB, и при точкѣ на ней K, составь
23,I. уголъ BKA равный углу DEG, а уголъ BKC равный углу DFH; и чрезъ точки A, B, C проведи, касательныя къ кругу ABC, пря-
17,III. мыя LAM, MBN, NCL.

Поелику къ кругу ABC касаются прямыя LM, MN, NL въ точкахъ A, B, C; и отъ центра K къ точкамъ A, B, C протянуты прямыя KA, KB, KC: то углы при точкахъ A, B, C суть прямые*. И поелику четыреугольника AMBK всѣ четыре угла равны четыремъ прямымъ*, ибо AMBK можетъ раздѣлиться на два треугольника; и углы MAK, KBM суть прямые: посему остальные углы AKB, AMB равны двумъ прямымъ. А и углы DEG, DEF равны двумъ прямымъ*; посему углы AKB, AMB равны угламъ DEG, DEF. Но въ нихъ уголъ AKB равенъ углу DEG; посему остальной AMB равенъ остальному DEF Подобно же докажется, что и уголъ LNM равенъ углу DFE; посему и остальной уголъ MLN равенъ остальному EDF. Слѣдственно треугольникъ LMN есть равноугольный треугольнику DEF, и описанъ около круга ABC*.

*18,III.
*32,I.
*13,I.
*опр. 4.

Итакъ около даннаго круга описанъ треугольникъ равноугольный данному треугольнику. Ч. И. С Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Въ данномъ треугольникѣ вписать кругъ. Пусть будетъ ABC данный треугольникъ. Надлежитъ въ треугольникѣ ABC вписать кругъ.

Раздѣли углы ABC, ACB по поламъ пря-
9,I. мыми BD, CD, кои и встрѣтятся пусть
въ точкѣ D; и проведи отъ D, перпендику-
12,I. лярныя къ AB, BC, CA, прямыя DE, DF, DG.

Поелику уголъ ABD равенъ углу CBD, ибо уголъ ABC раздѣленъ по поламъ; также и прямой уголъ BED равенъ прямому BFD; то два треугольника EBD, FBD имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, и одну сторону равную одной сторонѣ, кои противулежатъ равнымъ угламъ, то есть, общую имъ сторону BD: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторо-
26,I. намъ; а посему DE равна DF. Потому же и DG равна DF: « чего ради три прямыя DE, DF, DG суть взаимно равны ». И потому кругъ, изъ центра D и разстояніемъ одной изъ прямыхъ DE, DF, DG написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки; и будетъ касаться къ прямымъ AB, BC, CA, ибо углы при точкахъ E, F, G суть прямые. А буде бы пресѣкалъ оныя, то прямая, проведенная отъ конца поперечника подъ прямыми къ нему углами, упала бы въ кругъ, что,
16,III. по доказанному, нелѣпо. А посему и кругъ, изъ центра D и разстояніемъ одной изъ прямыхъ DE, DF, DG написанный, не пресѣчетъ прямыхъ AB, BC, CA; слѣдствен-

но къ нимъ каснется, и будетъ кругъ впи-
санный въ треугольникѣ ABC*. « Впиши *опр.5.
оный, какъ FEG. »

Итакъ въ данномъ треугольникѣ ABC
вписанъ кругъ EFG. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Около даннаго треугольника описать кругъ.

Пусть будетъ ABC данный треугольникъ.
Надлежитъ около даннаго треугольника ABC
описать кругъ.

Раздѣли прямыя AB, AC по поламъ въ
точкахъ D, E*; и отъ точекъ D, E про- *10,I.
веди, подъ прямыми углами къ AB, AC,
прямыя DF, EF*. Онѣ встрѣтятся или *11,I.
внутрь треугольника ABC, или на прямой BC,
или внѣ BC.

Пусть, вопервыхъ, встрѣтятся внутри
треугольника въ F. Протяни FB, FC, FA.
Поелику AD равна BD, а DF есть общая,
и подъ прямыми къ нимъ углами; посему
основаніе AF равно основанію FB*. Подобно *4,I.
докажемъ, что и CF равна AF; слѣдствен-
но и FB равна FC: чего ради три прямыя
FA, FB, FC суть взаимно равны. И пото-
му кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной
изъ прямыхъ FA, FB, FC написанный, прои-

детъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ
опр.6. описанный около треугольника ABC. Опиши оный, какъ ABC.

Но пусть DF, EF встрѣтятся и на прямой BC въ F, какъ значится на второй фигурѣ. Протяни AF. То подобно же докажемъ, что точка F есть центръ круга описаннаго около треугольника ABC.

Но пусть DF, EF встрѣтятся и внѣ треугольника ABC опять въ F, какъ значится на третьей фигурѣ. Протяни AF, BF, CF. Поелику опять AD равна DB, а DF есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами; посему и основаніе AF равно основанію FB. Подобно докажемъ, что и FC равна FA: слѣдствено и FB равна FC. И потому опять кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FA, FB, FC написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ
опр.6. описанный около треугольника ABC. Напиши оный, какъ ABC.

Итакъ около даннаго треугольника описанъ кругъ. ч. и с. н.

СЛѢДСТВІЕ. Отсюда явствуетъ, что когда центръ круга падаетъ внутри треугольника, то уголъ BAC будетъ въ отрѣзкѣ большемъ полукружія, а потому меньше пря-

маго*; когда же на BC, то будетъ въ полу- *31,III.
кружіи, и потому прямой*; а когда центръ *31,III.
упадетъ внѣ прямой BC, то уголъ BAC будетъ въ отрѣзкѣ меньшемъ полукружія, и потому больше прямаго*. Слѣдовательно *31,III.
и обратно, когда данный уголъ меньше прямаго, то прямыя DF, EF встрѣтятся внутри треугольника; когда же прямой, то на BC; а когда больше прямаго, то внѣ BC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Въ данномъ кругѣ вписать квадратъ.

Пусть будетъ ABCD данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ ABCD вписать квадратъ.

Проведи въ кругѣ ABCD два поперечника AC, BD, подъ прямыми углами одинъ къ другому; и протяни AB, BC, CD, DA.

Поелику BE равна ED, ибо E есть центръ, а EA есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами; посему основаніе AB равно основанію AD. Потому же и каждая изъ прямыхъ BC, CD равна каждой изъ прямыхъ BA, AD: чего ради четыреугольникъ ABCD есть равносторонный. Говорю же, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ прямая BD есть поперечникъ круга ABCD; то BAD есть полукружіе; посему уголъ BAD прямой*. По- *31,III.

тому же и каждый изъ угловъ ABC, BCD, CDA есть прямой: чего ради четыреугольникъ ABCD есть равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный; слѣдственно онъ
оп. 30, I. есть квадратъ*: И вписанъ въ данномъ
опр. 3. кругѣ ABCD.

Итакъ въ данномъ кругѣ ABCD вписанъ квадратъ ABCD. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Около даннаго круга описать квадратъ.

Пусть будетъ ABCD данный кругъ. Надлежитъ около круга ABCD описать квадратъ.

Проведи въ кругѣ ABCD два поперечника AC, BD, подъ прямыми углами одинъ къ другому; и чрезъ точки A, B, C, D проведи касательныя къ кругу ABCD прямыя FG, GH, HK, KF.

Поелику FG касается къ кругу ABCD, и отъ центра E къ прикосновенію A протяну-
18, III. та прямая EA; то углы при A суть прямые. Потому же и углы при точкахъ B, C, D суть прямые. И поелику уголъ AEB есть прямой, и уголъ EBG прямой же; посему GH парал-
28, I. лельна къ AC. Потому же и AC параллельна къ FK; слѣдственно и GH параллельна къ
30, I. FK. Подобно докажемъ, что и каждая изъ

прямыхъ GF, HK параллельна къ BED. Итакъ GK, GC, AK, FB, BK суть параллелограммы; посему GF равна HK*, а GH *34,1.
равна FK. И поелику AC равна BD; и AC равна каждой изъ прямыхъ GH, FK, а BD каждой изъ прямыхъ GF, HK: посему каждая изъ прямыхъ GH, FK равна каждой изъ прямыхъ GF, HK. Чего ради четыреугольникъ FGHK есть равносторонный. Говорю же, что онъ и прямоугольный. Ибо, какъ GBEA есть параллелограммъ; и уголъ AEB прямой: то и уголъ AGB есть прямой*. Подобно докажемъ, *34 1.
что и углы при H, K, F суть прямые: чего ради четыреугольникъ FGHK есть прямоугольный. А доказано, что онъ и равносторонный; слѣдственно онъ есть квадратъ: И описанъ около круга ABCD*. *опр. 4.

Итакъ около даннаго круга описанъ квадратъ. ч. и с. н. (32).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Въ данномъ квадратѣ вписать кругъ.

Пусть будетъ ABCD данный квадратъ. Надлежитъ въ квадратѣ ABCD вписать кругъ.

Раздѣли каждую изъ прямыхъ AB, AD по поламъ въ точкахъ F, E; и чрезъ E проведи, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ AB, CD, прямую EH*; а чрезъ F *31,1.

проведи, параллельную къ которой нисть изъ прямыхъ AD, BC, прямую FK. Итакъ каждый изъ четыреугольниковъ AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD есть параллелограммъ; и противулежащія ихъ стороны
34,1. суть равны. И поелику AD равна AB; и AE есть половина AD, а AF половина AB: посему и AE равна AF; слѣдственно и противулежащія имъ стороны равны, а посему и FG равна GE. Подобно докажемъ, что и каждая изъ прямыхъ GH, GK равна каждой изъ прямыхъ FG, GE: чего ради четыре прямыя GE, GF, GH, GK взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра G и разстояніемъ одной изъ прямыхъ GE, GF, GH, GK написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки; и будетъ касаться къ прямымъ AB, BC CD, DA, ибо углы при E, F, H, K суть прямые. А буде бы кругъ пресѣкалъ прямыя AB, BC, CD, DA; то прямая, проведеннная отъ конца поперечника подъ прямыми къ нему углами, упала бы въ кругъ, что, по доказанному, нелѣпо*. А посему и кругъ, изъ центра G и разстояніемъ одной изъ прямыхъ GE, GF, GH, GK написанный, не пресѣчетъ прямыхъ AB, BC, CD, DA: слѣдственно къ нимъ каснется, и будетъ кругъ
опр.5. вписанный въ квадратъ ABCD. « Впиши оный, какъ EFHK. »

Итакъ въ данномъ квадратѣ вписанъ кругъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Около данннаго квадрата описать кругъ.

Пусть будетъ ABCD данный квадратъ. Надлежитъ около квадрата ABCD описать кругъ.

Протяни AC, BD, кои пресѣкутся пусть въ E.

Поелику DA равна AB, а AC общая; то двѣ прямыя DA, AC равны двумъ прямымъ BA, AC; и основаніе DC равно основанію BC: посему уголъ DAC равенъ углу BAC*; а по- *8.1.
сему уголъ DAB раздѣленъ по поламъ прямою AC. Подобно докажемъ, что и каждый изъ угловъ ABC, BCD, CDA раздѣленъ по поламъ одною изъ прямыхъ AC, DB. И поелику уголъ DAB равенъ углу ABC; и уголъ EAB есть половина угла DAB, а уголъ EBA есть половина угла ABC: посему уголъ EAB равенъ углу EBA; слѣдственно и сторона EA равна сторонѣ EB*. Подобно докажемъ, *6.1.
что и каждая изъ прямыхъ EA, EB равна каждой изъ прямыхъ EC, ED: чего ради четыре прямыя EA, EB, EC, ED суть взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра E и разстояніемъ одной изъ прямыхъ EA, EB,

EC, ED написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки, и будетъ кругъ описанный
опр.6. около квадрата ABCD. Опиши оный, какъ ABCD.

Итакъ около даннаго квадрата описанъ кругъ. ч. и с. н. (33).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Составить равнобедренный треугольникъ, имѣющій каждый изъ угловъ при основаніи двукратный остальнаго.

Изложи какую нибудь прямую AB; и разсѣки ее въ точкѣ C, такъ чтобы прямоугольникъ въ AB, BC былъ равенъ квадрату
11,II. изъ CA; и изъ центра A, разстояніемъ AB, напиши кругъ BDE; и въ кругѣ BDE
1. помѣсти прямую BD равную прямой AC, которая не больше поперечника круга BDE; и протяни AD, CD; и около треугольника
5. ACD опиши кругъ ACD.

Поелику прямоугольникъ въ AB, BC равенъ квадрату изъ AC, а AC равна BD; посему прямоугольникъ въ AB, BC равенъ квадрату изъ BD. Итакъ поелику внѣ круга ACD взята точка B; и отъ B на кругъ ACD падаютъ двѣ прямыя BA, BD, изъ коихъ одна пресѣкаетъ кругъ, а другая къ нему падаетъ; и пря-

моугольникъ въ AB, BC равенъ квадрату изъ BD: то BD касается къ кругу ACD*. И поелику *37,III.
BD касается, и отъ прикосновенія D проведена прямая DC; посему уголъ BDC равенъ углу въ накосьлежащемъ отрѣзкѣ круга, то есть углу DAC*. Поелику же уголъ BDC равенъ *32,III.
углу DAC; придай обще уголъ CDA: посему цѣлый уголъ BDA равенъ двумъ угламъ CDA, DAC. Но угламъ CDA, DAC равенъ внѣшный уголъ BCD*; посему уголь BDA равенъ и углу *32,I.
BCD. Уголъ же BDA равенъ углу CBD*, ибо *5,I.
сторона DA равна сторонѣ AB; слѣдственно и уголъ DBA равенъ углу BCD. Итакъ три угла BDA, DBA, BCD суть взаимно равны. И поелику уголъ DBC равенъ углу BCD; то и сторона BD равна сторонѣ DC*. Но BD, *6,I.
по положенію, равна CA; посему и AC равна CD, слѣдственно и уголъ CDA равенъ углу DAC: а посему углы CDA, DAC суть двукратны угла DAC. Угламъ же CDA, DAC равенъ уголъ BCD, посему и уголъ BCD есть двукратный угла DAC. Уголъ же BCD равенъ каждому изъ угловъ BDA, DBA; чего ради и каждый изъ угловъ BDA, DBA есть двукратный угла BAD.

Итакъ составленъ равнобедренный треугольникъ ADB, имѣющій каждый изъ угловъ при основаніи DB двукратный остальнаго. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Въ данномъ кругѣ вписать равносторонный и равноугольный пятиугольникъ.

Пусть будетъ ABCDE данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ ABCDE вписать равносторонный и равноугольный пятиугольникъ.

Изложи равнобедренный треугольникъ FGH, имѣющій каждый изъ угловъ G, H
10. двукратный угла F; и впиши въ кругѣ ABCDE треугольникъ ACD равноугольный
2. треугольнику FGH, такъ чтобы уголъ CAD былъ равенъ углу F, а каждый изъ угловъ ACD, CDA былъ равенъ каждому изъ угловъ G, H: посему каждый изъ угловъ ACD, CDA ть двукратный угла CAD. Раздѣли каждый изъ угловъ ACD, CDA по поламъ прямыми
9,I. CE, DB; и протяни AB, BC, DE, EA.

Поелику каждый изъ угловъ ACD, CDA есть двукратный угла CAD; и раздѣлены они по поламъ прямыми CE, DB: то пять угловъ DAC, ACE, ECD, CDB, BDA взаимно равны. Равные же углы стоятъ на ра-
26,III. вныхъ дугахъ; посему пять дугъ AB, BC, CD, DE, EA взаимно равны. А равныя ду-
29,III. ги стягиваются равными прямыми; посему пять прямыхъ AB, BC, CD, DE, EA взаимно равны. Чего ради пятиугольникъ ABCDE

есть равносторонный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга AB равна DE; придай обще дугу BCD: посему цѣлая дуга ABCD равна цѣлой дугѣ EDCB. На дугѣ же ABCD стоитъ уголъ AED, а на дугѣ EDCB уголъ BAE; посему уголъ BAE равенъ углу AED*. Потому же и каждый изъ угловъ ABC, *27,III.
BCD, CDE равенъ каждому изъ угловъ BAE, AED: чего ради пятиугольникъ ABCDE есть равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный:

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ равносторонный и равноугольный пятиугольникъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Около даннаго круга описать равносторонный и равноугольный пятиугольникъ.

Пусть будетъ ABCDE данный кругъ. Надлежитъ около круга ABCDE описать равносторонный и равноугольный пятиугольникъ.

Возьми точки A, B, C, D, E, при которыхъ суть углы вписаннаго пятиугольника*: итакъ дуги AB, BC, CD, DE, EA *11.
взаимно равны*; и чрезъ A, B, C, D, E *28,III.
проведи касательныя къ кругу прямыя GH, HK, KL, LM, MG; и возьми круга ABCDE центръ F; и протяни FB, FK, FC, FL, FD.

Поелику прямая KL касается къ кругу ABCDE въ C, и отъ центра F къ прикосновенію C протянута прямая FC; то FC
18,III. перпендикулярна къ KL; посему каждый изъ угловъ при C есть прямой. Потому же и углы при точкахъ B, D суть прямые. И поелику уголъ FCK прямой; то квадратъ изъ FK равенъ квадратамъ изъ FC,
47,I. CK. Потому же и квадратамъ изъ FB, BK равенъ квадратъ изъ FK: слѣдственно квадратамъ изъ FC, CK равны квадраты изъ FB, BK. Но въ нихъ квадратъ изъ FC равенъ квадрату изъ FB; посему и остальной квадратъ изъ CK равенъ остальному изъ BK; а посему CK равна BK. Поелику же FB равна FC, а FK общая; то двѣ прямыя BF, FK равны двумъ прямымъ CF, FK; и основаніе BK равно основанію CK: посему уголъ BFK равенъ углу KFC, а уголъ
8,I. BKF равенъ углу FKC; а посему уголъ BFC есть двукратный угла KFC, а уголъ BKC угла FKC. Потому же и уголъ CFD есть двукратный угла CFL, а уголъ CLD двукратный угла CLF. И поелику дуга BC равна дугѣ CD; то уголъ BFC равенъ углу
27,III. CFD. Но уголъ BFC есть двукратный угла KFC, а уголъ DFC двукратный угла LFC; посему и уголъ KFC равенъ углу LFC.

А и уголъ FCK равенъ углу FCL; итакъ два треугольника FKC, FLC, имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, общую имъ сторону FC: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, и остальной уголъ равный остальному углу; а посему прямая KC равна CL, и уголъ FKC равенъ углу FLC*. Поелику же KC равна CL; то *26,1.
KL есть двукратная прямой KC. Такъ же докажется, что и HK есть двукратная BK. И какъ по доказанному, BK равна KC; и LD есть двукратная KC, а HK двукратная BK; посему и HK равна KL. Подобно докажется, что и каждая изъ прямыхъ HG, GM, ML равна каждой изъ прямыхъ HK, KL: чего ради пятиугольникъ GHKLM есть равносторонный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ уголъ FKC равенъ углу FLC; по доказанному же угла FKC есть двукратный уголъ HKL, а угла FLC двукратный уголъ KLM: посему уголъ HKL равенъ углу KLM. Подобно докажется, что и каждый изъ угловъ KHG, HGM, GML равенъ каждому изъ угловъ HKL, KLM: чего ради пять угловъ GHK, HKL, KLM, LMG, MGH взаимно равны. Итакъ пятиугольникъ

GHKLM есть равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный: И описанъ около круга ABCDE. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Въ даномъ равносторонномъ и равноугольномъ пятиугольникѣ вписать кругъ.

Пусть будетъ ABCDE данный равносторонный и равноугольный пятиугольникъ. Надлежитъ въ пятиугольникѣ ABCDE вписать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD, CDE по поламъ прямыми CF, DF; и отъ точки F, въ коей встрѣтятся взаимно прямыя CF, DF, протяни прямыя FB, FA, FE. Поелику BC равна CD, а CF общая; то двѣ прямыя BC, CF равны двумъ прямымъ DC, CF; и уголъ BCF равенъ углу DCF: посему основаніе BF равно основанію DF; и треугольникъ BFC равенъ треугольнику DFC; и прочіе углы равны прочимъ угламъ, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ: а посему уголъ CBF равенъ углу CDF. И поелику уголъ CDE есть двукратный угла CDF; уголъ же CDE равенъ углу ABC, и уголъ CDF углу CBF; посему и уголъ CBA есть двукратный угла CBF. Итакъ уголъ

ABF равенъ углу FBC; посему уголъ ABC раздѣленъ по поламъ прямою BF. Подобно докажется, что и каждый изъ угловъ BAE, AED раздѣленъ по поламъ прямыми FA, FE. Отъ точки F проведи, перпендикулярныя къ AB, BC, CD, DE, EA, прямыя FG, FH, FK, FL, FM. Поелику уголъ HCF равенъ углу KCF, и прямой уголъ FHC равенъ прямому FKC, то два треугольника FHC, FKC имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, то есть, общую имъ сторону FC, противулежащую одному изъ равныхъ угловъ: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ; а посему перпендикулярная FH равна перпендикулярной FK. Подобно докажется, что и каждая изъ прямыхъ FL, FM, FG равна каждой изъ прямыхъ FH, FK: чего ради пять прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM написанный, пройдетъ и чрезъ прочія точки; и будетъ касаться къ прямымъ AB, BC, CD, DE, EA, ибо углы при точкахъ G, H, K, L, M суть прямые. А буде бы не касался, но пресѣкалъ оныя; то вышло бы, что прямая, проведенная отъ конца попереч-

ника подъ прямыми къ нему углами, упала въ
16,III. кругъ, что, по доказанному уже, нелѣпо. А посему и кругъ, изъ центра F и разстоянїемъ одной изъ прямыхъ FG, FH, FK, FL, FM написанный, не пресѣчетъ прямыхъ AB, BC, CD, DE, EA; слѣдственно къ нимъ касается. Напиши оный, какъ GHKLM.

Итакъ въ данномъ равносторонномъ и равноугольномъ пятиугольникѣ вписанъ кругъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Около даннаго равностороннаго и равноугольнаго пятиугольника описать кругъ.

Пусть будетъ ABCDE данный равносторонный и равноугольный пятиугольникъ. Надлежитъ около пятиугольника ABCDE описать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD, CDE по поламъ прямыми CF, FD; и отъ точки F, въ коей встрѣтятся сїи прямыя, къ точкамъ B, A, E протяни прямыя FB, FA, FE. Подобно прежнему докажется, что каждый изъ угловъ CBA, BAE, AED раздѣленъ по поламъ прямыми FB, AF, EF. И поелику уголъ BCD равенъ углу CDE; и угла BCD половина есть уголъ FCD, а угла CDE по-

ловина уголъ CDF; посему и уголъ FCD равенъ углу FDC; слѣдственно и сторона FC равна сторонѣ FD*. Подобно докажется, *6,1. что и каждая изъ прямыхъ FB, FA, FE равна каждой изъ прямыхъ FC, FD: чего ради пять прямыхъ FA, FB, FC, FD, FE взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра F и разстоянїемъ одной изъ прямыхъ FA, FB, FC, FD, FE написанный, пройдетъ и чрезъ прочїя точки, и будетъ описанный около равностороннаго и равноугольнаго пятиугольника ABCDE. Опиши сей кругъ, и пусть будетъ онъ ABCDE.

Итакъ около даннаго равностороннаго и равноугольнаго пятиугольника описанъ кругъ. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Въ данномъ кругѣ вписать равносторонный и равноугольный шестиугольникъ.

Пусть будетъ ABCDEF данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ ABCDEF вписать равносторонный и равноугольный шестиугольникъ.

Круга ABCDEF проведи попеперечникъ AD; и возьми сего круга центръ G; и изъ центра D разстоянїемъ, DG напиши кругъ

EGCH; и протянутыя EG, CG продолжи къ точкамъ B, F; и протяни AB, BC, CD, DE, EF, FA. Говорю, что шестиугольникъ ABCDEF есть равносторонный и равноугольный.

Поелику точка G есть центръ круга ABCDEF; то GE равна GD. Еще же, поелику точка D есть центръ круга EGCH; то DE равна DG. Но GE, по доказанному, равна GD; посему GE равна и ED: итакъ треугольникъ EGD есть равносторонный; а посему три его угла EGD, GDE, DEG взаимно равны, ибо равнобедренныхъ треугольниковъ углы при основанiи взаим-
5,1. но равны. Поелику же треугольника всѣ
32,1. три угла равны двумъ прямымъ: посему уголъ EGD есть третья часть двухъ прямыхъ. Подобно докажется, что и уголъ DGC есть третья часть двухъ прямыхъ. И поелику прямая CG на прямую EB поставленная дѣлаетъ смѣжные углы EGC,
13,1. CGB равные двумъ прямымъ; то и остальной CGB есть третья часть двухъ прямыхъ. Итакъ три угла EGD, DGC, CGB взаимно равны; но углы BGA, AGF, FGE, какъ противуположные, равны угламъ EGD,
15,1. DGC, CGB; посему шесть угловъ EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE взаимно ра-

вны. Равные же углы стоятъ на равныхъ дугахъ*; посему шесть дугъ AB, BC, CD, DE, EF, FA взаимно равны. А равныя дуги стягиваются равными прямыми*; посему шесть прямыхъ взаимно равны. Чего ради шестиугольникъ ABCDEF есть равносторонный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга FA равна дугѣ ED; придай обще дугу ABCD: посему и цѣлая дуга FABCD равна цѣлой дугѣ EDCBA. На дугѣ же FABCD стоитъ уголъ FED, а на дугѣ EDCBA стоитъ уголъ AFE; посему уголъ AFE равенъ углу FED*. Подобно до- *27,III.
кажется, что и прочіе углы шестиугольника ABCDEF, одинъ по одному, равны каждому изъ угловъ AFE, FED: чего ради шестиугольникъ ABCDEF есть равноугольный. А доказано, что онъ и равносторонный: И вписанъ въ кругѣ ABCDEF.

Итакъ въ данномъ кругѣ вписанъ равносторонный и равноугольный шестиугольникъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что сторона шестиугольника равна прямой изъ центра круга.

И естьли чрезъ точки A, B, C, D, E, F проведемъ касательныя къ кругу; то

опишется около круга равносторонный и равноугольный шестиугольникъ, въ силу того, что сказано о пятиугольникѣ. Такъ же сходно съ тѣмъ, что сказано о пятиугольникѣ, въ данномъ шестиугольникѣ впишемъ кругъ, и опишемъ около него. (34).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Въ данномъ кругѣ вписать равносторонный и равноугольный пятнадцатиугольникъ.

Пусть будетъ ABCD данный кругъ. Надлежитъ въ кругѣ ABCD вписать равносторонный и равноугольный пятнадцатиугольникъ.

Напиши въ кругѣ ABCD равностороннаго треугольника въ немъ вписаннаго сторону AC, и равностороннаго пятиугольника сторону AB. Поелику окружность ABCD должна быть раздѣлена на пятнадцать равныхъ частей; то дуга ABC, какъ третья часть окружности, будетъ содержать въ себѣ оныхъ пять, а дуга AB, какъ пятая часть, будетъ содержать три: посему остальная дуга BC будетъ содержать двѣ. Раздѣли
30,III. BC по поламъ въ E; посему каждая изъ дугъ BE, EC будетъ пятнадцатая часть окружности круга ABCD. Итакъ, естьли проти-

нувъ прямыя BE, EC, помѣстимъ въ кругѣ ABCD, одну за другою, равныя имъ прямыя; то и получится вписанный въ кругѣ ABCD равносторонный и равноугольный пятнадцатиугольникъ ч. и с. н.

Сходно же съ тѣмъ, что сказано о пятиугольникѣ, естьли чрезъ точки дѣленія круга проведемъ касательныя къ нему; то опишется около круга равносторонный и равноугольный пятнадцатиугольникъ. И еще сходно съ тѣмъ, что сказано о пятиугольникѣ, въ данномъ пятнадцатиугольникѣ впишемъ кругъ, и опишемъ около него. (35).

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА V.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Меньшая величина называется частною (*μέρος*) большей величины, когда меньшая измѣряетъ большую. (36).

2. Большая же называется кратною (*πολλαπλάσιον*) меньшей, когда большая измѣряетъ меньшую. (37).

3. Отношеніе есть взаимная нѣкая зависимость двухъ однородныхъ величинъ по ихъ количеству. (*Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις*). (38).

4. Величины называются имѣющими отношеніе одна къ другой, кои будучи взяты кратно, могутъ быть больше одна другой. (39).

5. Величины, говорится, суть въ томъже отношенiи, первая ко второй и третья къ четвертой; когда равнократныя первой величины и третьей, и равнократныя второй величины и четвертой, взятыя по какому либо кратствованiю, суть таковы, что поперемѣнно каждая каждой, или купно равны, или купно больше, или купно меньше. (40).

6. Величины имѣющiя тоже отношенiе назовемъ пропорцiональными.

7. Когда же изъ равнократныхъ, кратная первой больше кратныя второй, но кратная третьей не больше кратныя четвертой; тогда говорится, что первая величина ко второй имѣетъ большее отношенiе, нежели третья къ четвертой. (41).

8. Пропорцiя есть подобiе *или тожество* отношенiй. (*Αναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν ὁμοιότης, а подругимъ: ταυτότης*). (42).

9. Пропорцiя состоитъ, по меньшей мѣрѣ, изъ трехъ членовъ. (43).

10 Когда три величины пропорцiональны; то говорится, что первая къ третьей имѣетъ удвоенное отношенiе первыя ко второй.

11. Когда четыре величины пропорцiональны (44); то говорится, что первая къ четвертой имѣетъ утроенное отношенiе

первыя ко второй: и такъ далѣе, пока пропорція продолжится. (45).

12. Сходственными величинами называются предъидущія съ предъидущими, а послѣдующія съ послѣдующими.(46).

13. Премѣненіе отношеній (*Εναλλὰξ λόγος*) есть взятіе предъидущей къ предъидущей, и послѣдующей къ послѣдующей.

14. Преложеніе отношенія (*Ανάπαλιν λόγος*) есть взятіе послѣдующей какъ предъидущей, къ предъидущей какъ послѣдующей.

15. Совокупленіе отношенія (*Σύνθεσις λόγου*) есть взятіе предъидущей съ послѣдующею, какъ одной, къ сей послѣдующей.

16. Отдѣленіе отношенія (*Διαίρεσις λόγου*) есть взятіе избытка предъидущей предъ послѣдующею, къ сей послѣдующей.

17. Обращеніе отношенія (*Αναστροφὴ λόγου*) есть взятіе предъидущей, къ избытку предъидущей предъ послѣдующею.

18. Равномѣстіе отношеній (*Διΐσου λόγος*) или равенство ихъ есть то, когда изъ имѣющихся многихъ величинъ и другихъ имъ равномногихъ и находящихся по парно въ томъже отношеніи, будетъ какъ изъ первыхъ величинъ первая къ послѣдней, такъ изъ вторыхъ величинъ первая къ послѣдней.

Или иначе: Когда взяты будутъ крайнія, а среднія оставлены. (47).

19. Стройная (Τεταγμένη) пропорція или прямая есть та, когда « изъ имѣющихся таковыхъ же величинъ » будетъ какъ « изъ первыхъ величинъ » предъидущая къ послѣдующей, такъ « изъ вторыхъ величинъ » предъидущая къ послѣдующей; и какъ « изъ первыхъ величинъ » послѣдующая къ другой нѣкоей, такъ « изъ вторыхъ величинъ » послѣдующая къ другой нѣкоей. (48).

20. Нестройная же (Τεταραγμένη) пропорція или обратная есть та, когда изъ имѣющихся трехъ величинъ и другихъ имъ равномногихъ, будетъ какъ изъ первыхъ величинъ предъидущая къ послѣдующей, такъ изъ вторыхъ величинъ предъидущая къ послѣдующей; и какъ изъ первыхъ величинъ послѣдующая къ другой нѣкоей, такъ другая нѣкая къ послѣдующей вторыхъ величинъ. (49).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнократны, каждая каждой; то сколько одна изъ величинъ есть кратная одной, столько и всѣ будутъ кратны всѣхъ.

Пусть будетъ сколько ниесть величинъ AB, CD, кои другихъ равномногихъ величинъ E, F равнократны, каждая каждой. Говорю, что сколько кратная есть AB величины E, столько кратныя будутъ и AB, CD величинъ E, F.

Поелику равнократныя суть, AB величины E, и CD величины F; то сколько величинъ въ AB равныхъ E, столько же величинъ и въ CD равныхъ F. Раздѣли AB на величины равныя E, то есть, на AG, GB; а CD на величины равныя F, то есть, на CH, HD. Итакъ величины CH, HD суть равномногія величинамъ AG, GB. И поелику AG равна E, а CH равна F; то и AG, CH равны E, F. Такожъ, поелику GB равна E, а HD равна F; то и GB, HD равны E, F. Посему сколько величинъ въ AB равныхъ E, столько же величинъ и въ AB, CD равныхъ E, F: чего ради сколько кратная есть AB величины E, столько кратныя будутъ и AB, CD величинъ E, F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой равнократны; и также пятая

второй, и шестая четвертой равнократны: то и совокупленно, первая съ пятою второй, и третья съ шестою четвертой, будутъ равнократныя.

Пусть первая величина AB второй C, и третья DE четвертой F, будутъ равнократныя; и также, пусть пятая BG второй C, и шестая EH четвертой F, будутъ равнократныя. Говорю, что и совокупленно, первая съ пятою то есть AG, второй C, и третья съ шестою, то есть DH, четвертой F, будутъ равнократныя.

Поелику равнократныя суть, AB величины C, и DE величины F; то сколько величинъ въ AB равныхъ C, столько же величинъ и въ DE равныхъ F. Потому же сколько величинъ въ BG равныхъ C, столько же величинъ и въ EH равныхъ F. Чего ради сколько величинъ въ цѣлой AG равныхъ C, столько же величинъ и въ цѣлой DH равныхъ F. Итакъ сколько кратная есть AG величины C, столько кратная будетъ и DH величины F: чего ради и совокупленно, первая съ пятою то есть AG, второй C, и третья съ шестою то есть DH, четвертой F, будутъ равнократныя.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (50).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой равнократны; и взяты будутъ первой и третьей равнократныя: то равномѣстно, сіи взятыя кратныя будутъ равнократныя каждая каждой, одна второй, а другая четвертой.

Пусть первая величина A второй B, и третья C четвертой D, будутъ равнократныя; и пусть будутъ взяты первой A и третьей C равнократныя EF, GH. Говорю, что EF, величины B, и GH величины D суть равнократныя.

Поелику равнократныя суть, EF величины A, и GH величины C; то сколько величинъ въ EF равныхъ A, столько же величинъ и въ GH равныхъ C. Раздѣли EF на величины равныя A, то есть, на EK, KF; а GH на величины равныя C, то есть, на GL, LH. Итакъ величины EK, KF суть равномногія величинамъ GL, LH. И поелику равнократныя суть, A величины B, и C величины D; и EK равна A, а GL равна C: посему равнократныя суть, EK величины B, и GL величины D. Потому же равнократны, KF величины B, и LH величины D. Поелику же первая величина EK

второй B, и третья GL четвертой D, равнократны; и также пятая KF второй B, и шестая LH четвертой D, равнократны: посему и совокупленно, первая съ пятою, то есть EF, второй B, и третья съ шестою, то есть GH, четвертой D суть равнократны*.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

*2.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой; то и равнократныя первой величины и третьей, къ равнократнымъ второй величины и четвертой, по какому ниесть кратствованію, будутъ имѣть тоже отношеніе, взятыя поперемѣнно.

Пусть первая величина A ко второй B имѣетъ тоже отношеніе, что и третья C къ четвертой D; и пусть будутъ взяты величинъ A, C равнократныя E, F, а величинъ B, D другія какія ниесть равнократныя G, H. Говорю, что какъ E къ G, такъ F къ H.

Возьми величинъ E, F равнократныя K, L; а величинъ G, H другія какія ниесть равнократныя M, N.

Поелику равнократныя суть, E величины A, и F величины C; и взяты величинъ E, F равнократныя K, L: посему равнократныя суть, K величины A, и L величины C*. Потому же равнократны суть, M величины B, и N величины D. И поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и взяты величинъ A, C равнократныя K, L, а величинъ B, D другія какія ниесть равнократныя M, N: посему естьли K больше M, то и L больше N; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше*. Но K, L суть величинъ E, F равнократныя, а M, N суть величинъ G, H другія какія ниесть равнократныя: чего ради какъ E къ G, такъ F къ H*.

*3.

*опр. 5.

*опр. 5.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (51).

Слѣдствіе. Поелику доказано, что естьли K больше M, то и L больше N; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше: почему явно, что и обратно, естьли M больше K, то и N больше L; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше: а посему будетъ, и какъ G къ E, такъ H къ F*. Отсюда явствуетъ, что естьли четыре величины пропорціональны; то и преложеніемъ* будутъ пропорціональны.

*опр. 5.

*опр. 14.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели цѣлая величина цѣлой, и отнятая отъ оной, отнятой отъ другой суть равнократныя; то и остальная остальной, и цѣлая цѣлой будутъ равнократныя.

Пусть цѣлая величина AB цѣлой CD, и отнятая AE отнятой CF, будутъ равнократныя. Говорю, что и остальная EB остальной FD, и цѣлая AB цѣлой CD будутъ равнократныя.

Сколько кратная есть AE величины CF, пусть будетъ столько кратна и EB величины CG.

Поелику равнократныя суть, AE величины CF, и EB величины GC; то равнократны суть, AE величины CF, и AB величины GF*. А по положенію, равнократны, *1.
AE величины CF, и AB величины CD: итакъ AB есть равнократная каждой изъ величинъ GF, CD; а посему GF равна CD. Отними обще CF; посему остальная GC равна остальной DF. И поелику равнократныя суть, AE величины CF, и EB величины GC; а GC равна DF: то равнократны суть AE величины CF, и EB величины FD. А по положенію, равнократны AE величины CF, и AB величины CD; посему равнократны суть

EB величины FD, и AB величины CD. Чего ради и остальная EB остальной FD есть столько кратная, какъ и цѣлая AB цѣлой CD.

Итакъ, ежели цѣлая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели двѣ величины равнократны двухъ величинъ; и отнятыя нѣкія будутъ равнократны ихъ самыхъ: то остальныя будутъ или равныя имъ же, или равнократныя ихъ.

Пусть двѣ величины AB, CD будутъ двухъ величинъ E, F равнократныя; и пусть отнятыя AG, CH будутъ тѣхъ же E, F равнократныя. Говорю, что остальныя GB, HD или равны величинамъ E, F, или равнократны ихъ.

Вопервыхъ, пусть будетъ GB равна E. Говорю, что и HD равна F. Положи величину CK, равную F.

Поелику равнократныя суть, AG величины E, и CH величины F; и GB равна E, а KC равна F; посему равнократныя
2. суть, AB величины E, и KH величины F. А по положенію, равнократны, AB величины E, и CD величины F; посему равнократны суть, KH величины F, и CD величины F. И поелику каждая изъ величинъ

KH, CD есть величины F равнократна; то KH равна CD. Отними обще CH; посему остальная KC равна остальной HD. Но KC равна F; посему и HD равна F. Слѣдовательно естьли GB равна E, то HD равна будетъ F.

Подобно докажемъ, что естьли величина GB величины E будетъ кратная; то столько кратная будетъ и величина HD величины F.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н. (52).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Равныя величины къ той же имѣютъ тоже отношеніе: И таже величина къ равнымъ « имѣетъ тоже отношеніе. »

Пусть будутъ A, B равныя величины; а C другая нѣкая величина. Говорю, что каждая изъ величинъ A, B къ C имѣетъ тоже отношеніе; и C къ каждой изъ величинъ A, B « имѣетъ тоже отношеніе. »

Возьми величинъ A, B равнократныя D, E; а величины C другую какую нибудь кратную F.

Поелику равнократныя суть, D величины A, и E величины B; и A равна B: посему и D равна E. Но F есть величины C другая

какая ниесть кратная: посему естьли D больше F, то и E больше F; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше. Но D, E суть величинъ A, B равнократныя; а F есть величины C другая какая ниесть кратная: чего ради какъ A къ C, такъ B къ C*.

*опр. 5.

Говорю такожъ, что и C къ каждой изъ величинъ A, B имѣетъ тоже отношенїе.

Ибо, сдѣлавъ тоже строенїе, подобно докажемъ, что D равна E. Но F есть другая нѣкая величина: посему естьли F больше D, то F больше и E: и естьли равна, то равна, и естьли меньше, то меньше. И F есть величины C кратная; а D, E суть величинъ A, B другїя какїя ниесть равнократныя: чего ради какъ C къ A, такъ C къ B*.

*опр. 5.

Итакъ равныя, и проч. ч. и д. н. (53).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Изъ неравныхъ величинъ большая къ той же имѣетъ большее отношенїе, нежели меньшая: И таже величина къ меньшей имѣетъ большее отношенїе, нежели къ большей.

Пусть будутъ AB, C неравныя величины, и пусть AB будетъ большая; а D

другая какая ниесть величина. Говорю, что AB къ D имѣетъ большее отношенїе нежели C къ D; и D къ C имѣетъ большее отношенїе, нежели къ AB.

Поелику AB больше C; то положи BE равную величинѣ C: итакъ меньшая изъ величинъ AE, EB взятая кратно, будетъ наконецъ больше D*. Вопервыхъ, пусть будетъ AE меньше величины EB. Бери кратно величину AE, пока получится величина больше D, и пусть будетъ FG таковая кратная, большая величины D; и сколько кратная есть FG величины AE, пусть будетъ столько кратная и GH величины EB, а K величины C; и возьми величины D двукратную величину L, трекратную M, и такъ далѣе всегда одною больше, пока взятая кратная величины D будетъ первая, большая величины K. Возьми таковую кратную; и пусть будетъ N четырекратная величины D, первая большая величины K. *опр. 4.

И поелику, «изъ кратныхъ величины D,» величина N есть первая, которой K меньше; то K не меньше величины M. Поелику же равнократныя суть, FG величины AE, и GH величины EB; то равнократны суть, FG величины AE, и FH величины AB*. Но FG величины AE, и K *1.

величины C, суть равнократны; посему равнократны и FH величины AB, и K величины C: а посему FH, K суть величинъ AB, C равнократныя. Еще же, поелику равнократныя суть, GH величины EB, и K величины C; и EB равна C: посему и K равна GH. Но K и не меньше M; посему и GH не меньше M: а FG больше D; посему цѣлая FH больше обѣихъ вмѣстѣ D, M. Но обѣ вмѣстѣ D, M равны величинѣ N; посему FH больше N. « Итакъ, поелику FH больше N, » а K не больше N; и FH, K суть величинъ AB, C равнократныя; а N есть величины D другая какая ниесть кратная: то AB къ D имѣетъ
опр.7. большее отношенїе, нежели C къ D.

Говорю же, что и D къ C имѣетъ большее отношенїе, нежели D къ AB.

Ибо, сдѣлавъ тоже строенїе, подобно докажемъ, что N больше K, а не больше FH. И N есть величины D кратная; а FH, K суть величинъ AB, C другїя какїя ниесть равнократныя: чего ради D къ C имѣетъ
опр.7. большее отношенїе, нежели D къ AB.

Но пусть AE будетъ больше EB: итакъ меньшая величина EB взятая кратно, будетъ
опр.4. наконецъ больше D. Возьми таковую, и пусть будетъ GH, кратная величины EB, большая величины D; и сколько кратная

есть GH величины EB, пусть будетъ столько кратная и FG величины AE, а K величины C. Подобно же докажемъ, что FH, K суть величинъ AB, C равнократныя. И такъ же возьми величины D кратную N, первую большую величины FG. Слѣдственно еще будетъ FG не меньше M, а GH больше D: посему цѣлая FH больше величинъ D, M, то есть величины N; а K не больше N, поелику даже и FG, большая величины GH, то есть величины K, есть не больше N. Слѣдующее за симъ докажется подобно предъидущему.

Итакъ изъ неравныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Величины къ тойже величинѣ имѣющія тоже отношеніе, взаимно равны: И къ которымъ таже величина имѣетъ тоже отношеніе, и тѣ взаимно равны.

Пусть имѣетъ каждая изъ величинъ A, B къ величинѣ C тоже отношеніе. Говорю, что A равна B.

Буде же нѣтъ; то каждая изъ величинъ A, B къ C не имѣла бы тоже отношеніе*: но *8.
каждая имѣетъ; посему A равна B.

Пусть имѣетъ еще C къ каждой изъ величинъ A, B тоже отношеніе. Говорю, что A равна B.

Буде же нѣтъ; то С къ каждой изъ вели-
8. чинъ А, В не имѣла бы тоже отношенїе:
но она имѣетъ: посему А равна В.

Итакъ величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Изъ величинъ къ тойже величинѣ имѣющихъ отношенїе, которая имѣетъ большее отношенїе, та есть большая: И къ которой величинѣ таже имѣетъ большее отношенїе, та есть меньшая.

Пусть имѣетъ А къ С большее отношенїе, нежели В къ С. Говорю, что А больше В.

Буде же нѣтъ; то А или равна величинѣ В, или меньше ея. Но А не равна
В; ибо каждая изъ величинъ А, В къ
7. С имѣла бы тоже отношенїе: но каждая не
имѣетъ; посему А не равна В. И А не
меньше В; ибо А къ С имѣла бы меньшее
8. отношенїе, нежели В къ С: но она не имѣетъ;
посему А не меньше В. А доказано, что и
ни равна: слѣдственно А больше В.

Пусть имѣетъ еще С къ В большее отношенїе, нежели С къ А. Говорю, что В меньше А.

Буде же нѣтъ; то или равна, или больше. Но В не равна А; ибо С къ каждой

изъ величинъ A, B имѣла бы тоже отношенїе*: но она не имѣетъ; посему A не *7.
равна B. И B не больше A; ибо C къ B имѣла бы меньшее отношенїе, нежели къ A*: но она не имѣетъ; посему B не больше *8.
A. А доказано, что и ни равна: слѣдственно B меньше A.

Итакъ изъ величинъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Отношенїя, кои суть тѣже съ тѣмъже отношенїемъ, суть и взаимно тѣже.

Пусть будутъ, какъ A къ B, такъ C къ D; и какъ C къ D такъ, E къ F. Говорю, что какъ A къ B, такъ E къ F.

Возьми величинъ A, C, E равнократныя G, H, K; а величинъ B, D, F другїя какїя ниесть равнократныя L, M, N.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и взяты величинъ A, C равнократныя G, H, а величинъ B, D другїя какїя ниесть равнократныя L, M: посему естьли G больше L, то и H больше M; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше*. Еще же, *опр.5.
поелику какъ C къ D, такъ E къ F; и взяты величинъ C, E равнократныя H, K, а величинъ D, F другїя какїя ниесть равнократныя M, N:

посему естьли H больше M, то и K больше N; и естьли равна, то равна; и естьли
опр.5. меньше, то меньше. Но естьли H больше M, то и G больше L; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше: слѣдственно, и естьли G больше L, то и K больше N; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше. И G, K величинъ A, E суть равнократныя; а L, N суть величинъ B, F другія какія ниесть равно-
опр.5. кратныя: чего ради какъ A къ B, такъ E къ F.

Итакъ отношенія, и проч. ч. и д. н. (54).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ пропорціональныхъ; то какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ.

Пусть будетъ сколько ниесть величинъ пропорціональныхъ A, B, C, D, E, F, то есть, какъ A къ B, такъ C къ D, и такъ E къ F. Говорю, что какъ A къ B такъ A, C, E къ B, D, F.

Возьми величинъ A, C, E равнократныя G, H, K; а величинъ B, D, F другія какія ниесть равнократныя L, M, N.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D, и такъ E къ F; и взяты величинъ A, C, E равнократныя G, H, K, а величинъ B, D, F другія какія ниесть равнократныя L, M, N: посему, естьли G больше L, то и H больше M, и K больше N; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше*. *опр. 5.
Слѣдственно естьли G больше L, то и G, H, K больше L, M, N; и естьли равна, то равны; и естьли меньше, то меньше. И G величины A, а G, H, K величинъ A, C, E суть равнократныя; ибо, ежели будетъ сколько ниесть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнократны, каждая каждой, то сколько одна изъ величинъ есть кратная одной, столько и всѣ будутъ кратны всѣхъ*. Потому же L величины B, и L, M, N *1.
величинъ B, D, F суть равнократныя. Чего ради какъ A къ B, такъ A, C, E къ B, D, F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой; третья же къ четвертой имѣетъ большее отношеніе, нежели пятая къ шестой;

то и первая ко второй будетъ имѣть большее отношенїе, нежели пятая къ шестой.

Пусть первая величина A ко второй B имѣетъ тоже отношенїе, что и третья C къ четвертой D; и пусть третья C къ четвертой D имѣетъ большее отношенїе, нежели пятая E къ шестой F. Говорю, что и первая A ко второй B будетъ имѣть большее отношенїе, нежели пятая E къ шестой F.

Поелику C къ D имѣетъ большее отношенїе, нежели E къ F: то суть нѣкїя величинъ C, E равнократныя, и величинъ D, F другїя какїя ниесть равнократныя; такїя, что кратная величины C больше кратныя величины D, а кратная величины
опр. 7. E не больше кратныя величины F. Возьми таковыя, и пусть будутъ величинъ C, E равнократныя G, H, а величинъ D, F другїя какїя ниесть равнократныя K, L; такъ что G больше K, а H не больше L: и сколько кратная есть G величины C, пусть будетъ столько кратная и M величины A; а сколько кратная K величины D, пусть будетъ столько кратная и N величины B.

И поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и взяты величинъ A, C равнократныя M,

G, а величинъ B, D другія какія ниесть равнократныя N, K: посему естьли M больше N, то и G больше K; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше*. Но G больше K, посему и M больше N. А H не больше L; и M, H суть величинъ A, E равнократныя, а N, L суть величинъ B, F другія какаія ниесть равнократныя: чего ради A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F*. *опр.5. *опр.7.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н. (55).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой, и первая больше третьей, то и вторая будетъ больше четвертой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть первая величина A ко второй B имѣетъ тоже отношеніе, что и третья C къ четвертой D; и пусть A будетъ больше C. Говорю, что и B больше D.

Поелику A больше C, и B есть другая какая ниесть величина; то A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ B*. Но какъ A къ B, такъ C къ D; посему и C къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели *8.

13. C къ B. А къ которой величинѣ таже имѣетъ
10. большее отношенїе, та естьменьшая; посему D меньше B; слѣдственно B больше D.

Подобно докажемъ, что естьли A равна C, то будетъ и B равна D: и естьли A меньше C, то будетъ и B меньше D.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Частныя величины къ своимъ равнократнымъ имѣютъ тоже отношенїе, взятыя попеременно.

Пусть будутъ равнократныя, AB величины C, DE величины F. Говорю, что какъ C къ F, такъ AB къ DE.

Поелику равнократныя суть, AB величины C, и DE величины F; то сколько величинъ въ AB равныхъ C, столько же величинъ и въ DE равныхъ F. Раздѣли AB на величины равныя C, какъ то на AG, GH, HB; а DE на величины равныя F, какъ то на DK, KL, LE. Итакъ величины AG, GH, HB суть равномногїя величинамъ DK, KL, LE. И поелику AG, GH, HB взаимно равны; и DK, KL, LE взаимно равны же: то какъ AG къ DK, такъ GH къ KL, и такъ
7. HB къ LE. Того ради какъ одна предъ-

идущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*; и по- *12.
тому какъ AG къ DK, такъ AB къ DE. Но AG равна C, а DK равна F: чего ради какъ C къ F, такъ AB къ DE*. *11.

Итакъ частныя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели четыре величины пропорціональны; то и премѣненіемъ будутъ пропорціональныя.

Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D пропорціональныя, то есть, какъ A, къ B, такъ C къ D. Говорю, что онѣ и премѣненіемъ будутъ пропорціональныя, то есть*, какъ A къ C, такъ B къ D. *опр. 13.

Возьми величинъ A, B равнократныя E, F; а величинъ C, D другія какія ниесть равнократныя G, H.

Поелику равнократныя суть, E величины A, и F величины B: а частныя величины къ своимъ равнократнымъ имѣютъ тоже отношеніе, взятыя поперемѣнно*: посему *15.
какъ A къ B, такъ E къ F. Но какъ A къ B, такъ C къ D; посему и какъ C къ D, такъ E къ F*. Еще же, поелику G, H вели- *11.
чинъ C, D равнократны; то какъ C къ

D, такъ G къ H. Но какъ C къ D, такъ E къ F; посему и какъ E къ F, такъ G къ
11. H. А естьли четыре величины пропорцїо-
14. нальны; и первая больше третьей, то и вторая будетъ больше четвертой; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше*. Посему, естьли E больше G, то и F больше H; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше. И E, F суть величинъ A, B равнократныя; а G, H суть величинъ C, D другїя какїя ниесть равнократныя: чего ради какъ A къ C, такъ
опр.5. B къ D.

Итакъ, ежели четыре, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели совокупленныя величины пропорцїональны; то и отдѣленныя будутъ пропорцїональны.

Пусть совокупленныя величины AB, BE,
опр.15. CD, DF будутъ пропорцїональны, то есть, какъ AB къ BE, такъ CD къ DF. Говорю, что онѣ и отдѣленныя будутъ пропорцїональ-
опр.16. ны, то есть, какъ AE къ EB, такъ CF къ FD.

Возьми величинъ AE, EB, CF, FD равнократныя GH, HK, LM, MN; а величинъ EB, FD другїя какїя ниесть равнократныя KP, NQ.

Поелику равнократныя суть, GH величины AE, и HK величины EB; то равнократны, GH величины AE, и GK величины AB*. Но *1.
GH величины AE, и LM величины CF равнократны; посему равнократныя суть, GK величины AB, и LM величины CF. Еще же, поелику равнократныя суть, LM величины CF, и MN величины FD; то равнократныя суть, LM величины CF, и LN величины CD. Но уже LM величины CF, и GK величины AB равнократны; посему равнократныя суть, GK величины AB, и LN величины CD; а посему GK, LN величинъ AB, CD суть равнократныя. Еще же, поелику равнократныя суть, HK величины EB, и MN величины FD; а также KP величины EB, и NQ величины FD равнократныя же: посему и совокупленно, HP величины EB, и MQ величины FD суть равнократныя*. И поелику какъ AB къ BE, такъ *2.
CD къ DF; и взяты величинъ AB, CD равнократныя GK, LN; а величинъ EB, FD другія какія ниесть равнократныя HP, MQ: посему естьли GK больше HQ, то и LN больше MQ; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше*. Пусть будетъ GK *опр.5.
больше HP; посему, по отнятіи общей HK, и GH больше KP. Но естьли GK больше HP, то и LN будетъ больше MQ: посему LN есть

опр.5. больше MQ; а, по отнятіи общей MN, и LM больше NQ. Итакъ естьли GH больше KP, то и LM больше NQ. Подобно докажемъ, что и естьли GH равна KP, то будетъ и LM равна NQ; и естьли меньше, то меньше. И GH, LM суть величинъ AE, CF равнократныя; а KP, NQ суть величинъ EB, FD другія какія нибудь равнократныя:
опр.5. чего ради какъ AE къ EB, такъ CF къ FD.

Итакъ, ежели величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели величины отдѣленныя пропорціональны; то и совокупленныя будутъ пропорціональны.

Пусть отдѣленныя величины AE, EB, CF, FD будутъ пропорціональны, то
опр.16. есть, какъ AE къ EB, такъ CF къ FD. Говорю, что онѣ и совокупленныя будутъ
опр.15. пропорціональны, то есть, какъ AB къ BE, такъ CD къ FD.

Ибо, естьли не будетъ какъ AB къ BE, такъ CD къ FD; то будетъ какъ AB къ BE, такъ CD къ нѣкоей величинѣ, или меньшей нежели DF, или большей.

Вопервыхъ, пусть будетъ къ меньшей DG. Поелику какъ AB къ BE, такъ CD къ

DG, то есть, совокупленныя величины пропорціональны; слѣдственно и отдѣленныя будутъ пропорціональны*: посему *17.
какъ AE къ EB, такъ CG къ GD. А по положенію, какъ AE къ EB, такъ CF къ FD; посему и какъ CG къ GD, такъ CF къ FD*. *11.
Но первая CG больше третьей CF; посему и вторая GD больше четвертой FD*. *14.
Она же и меньше: что невозможно; посему не будетъ какъ AB къ BE, такъ CD къ величинѣ меньшей нежели FD. Подобно докажемъ, что и ни къ большей: слѣдственно къ ней самой.

Итакъ, ежели величины, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели будетъ, какъ цѣлая величина къ цѣлой, такъ отнятая къ отнятой; то и остальная будетъ къ остальной, какъ цѣлая къ цѣлой.

Пусть будетъ какъ цѣлая величина AB къ цѣлой CD, такъ отнятая AE къ отнятой CF. Говорю, что и остальная EB будетъ къ остальной FD, какъ цѣлая AB къ цѣлой CD.

Поелику какъ AB къ CD, такъ AE къ CF; то премѣненіемъ, какъ BA къ AE такъ

16. DC къ CF. И поелику совокупленныя величины пропорціональны, то и отдѣлен-
17. ныя будутъ пропорціональны; посему какъ BE къ EA, такъ DF къ FC; и премѣненіемъ, какъ BE къ DF, такъ EA къ
16. FC. Но какъ AE къ CF такъ, по положенію, цѣлая AB къ цѣлой CD: чего ради и остальная EB будетъ къ остальной DF,
11. какъ цѣлая AB къ цѣлой CD.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

[СЛѢДСТВІЕ. И поелику доказано, что какъ AB къ CD, такъ EB къ FD; и пре-
16. мѣненіемъ, какъ AB къ BE, такъ CD къ DF: посему совокупленныя величины пропорціональны. А доказано, что какъ AB къ AE такъ CD къ CF, что и есть обращеніе. Отсюда явствуетъ, что естьли совокупленныя величины пропорціональны то онѣ и обращеніемъ будутъ пропорціональны. ч. и д. н.] (56).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая

будетъ больше шестой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ A, B, C три величины, и D, E, F другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъ же отношеніи, то есть: какъ A къ B, такъ D къ E; и какъ B къ C, такъ E къ F: и пусть, равномѣстно, будетъ A больше C. Говорю, что и D будетъ больше F: И естьли равна, то равна; естьли меньше, то меньше.

Поелику A больше C, а B есть другая нѣкая величина; большая же величина къ тойже имѣетъ большее отношеніе, нежели меньшая*: посему A къ B имѣетъ *8.
большее отношеніе, нежели C къ B. Но какъ A къ B, такъ D къ E; а какъ C къ B, преложеніемъ (57), такъ F къ E: посему и D къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели F къ E*: А изъ величинъ къ тойже величинѣ *11 и 13.
имѣющихъ отношеніе, которая имѣетъ большее отношеніе, та есть большая*; по- *10.
сему D больше F. Подобно докажемъ, что и естьли A равна C, то и D будетъ равна F; и естьли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъже отношеніи, пропорція же ихъ будетъ обратная; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая будетъ больше шестой; и ежели равна, то равна; и ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ A, B, C три величины, и D, E, F другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ томъже отношеніи, пропорція же ихъ пусть будетъ обратная, то есть: какъ A къ B, такъ E къ F; и какъ B къ C, такъ D къ E: и пусть, равномѣстно, будетъ A больше C. Говорю, что и D будетъ больше F: И естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше.

Поелику A больше C, а B есть другая нѣкая величина; то A къ B имѣетъ боль-
8. шее отношеніе, нежели C къ B. Но какъ A къ B, такъ E къ F; и какъ C къ B, преложеніемъ (57), такъ E къ D: посему и E къ F имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ
11и13. D. A къ которой величинѣ таже имѣетъ
10. большее отношеніе, т а есть меньшая; посему F меньше D; слѣдственно D больше F. Подобно докажемъ, что и естьли A равна

C, то и D будетъ равна F; и естьли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ, и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по двѣ въ томъже отношеніи; то и равномѣстно будутъ въ томъже отношеніи.

Пусть будетъ сколько ниесть величинъ A, B, C, и другихъ имъ равномногихъ D, E, F, взятыхъ по двѣ въ томъже отношеніи, то есть: какъ A къ B, такъ D къ E; и какъ B къ C, такъ E къ F. Говорю, что и равномѣстно будутъ въ томъже отношеніи, то есть*: какъ A къ C, такъ D къ F. *опр. 18.

Возьми величинъ A, D равнократныя G, H; а величинъ B, E другія какія ниесть равнократныя K, L; и еще величинъ C, F другія какія ниесть равнократныя M, N.

Поелику какъ A къ B, такъ D къ E; и взяты величинъ A, D равнократныя G, H, а величинъ B, E другія какія ниесть равнократныя K, L: то какъ G къ K, такъ H къ L*. Потому же и какъ K къ M, такъ L *4. къ N. И поелику суть три величины G, K, M, и другія имъ равномногія H, L, N взятыя

по двѣ и въ томъже отношенiи: посему равномѣстно, естьли G больше M, то и H больше N; и естьли равна, то равна; и
20. естьли меньше, то меньше. Но G, H суть величинъ A, D равнократныя; а M, N величинъ C, F другiя какiя ниесть равнократ-
опр.5. ныя: чего ради какъ A къ C, такъ D къ F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXIII.

Ежели будутъ три величины, и другiя имъ равномногiя, взятыя по двѣ въ томъже отношенiи, пропорцiя же ихъ будетъ обратная; то и равномѣстно будутъ въ томъже отношенiи.

Пусть будутъ A, B, C три величины, и D, E, F другiя имъ равномногiя, взятыя по двѣ въ томъ же отношенiи, пропорцiя же ихъ пусть будетъ обратная, то
опр.20. есть: какъ A къ B, такъ E къ F; и какъ B къ C, такъ D къ E. Говорю, что какъ A къ C, такъ D къ F.

Возьми величинъ A, B, D равнократныя G, H, K; а величинъ C, E, F другiя какiя ниесть равнократныя L, M, N.

Поелику равнократныя суть G, H величинъ A, B; частныя же величины къ сво-

имъ равнократнымъ имѣютъ тоже отношенiе*: посему какъ A къ B, такъ G къ H. *15.
Потому же и какъ E къ F, такъ M къ N.
Но какъ A къ B, такъ E къ F; посему и
какъ G къ H, такъ M къ N*. И поелику какъ *11.
B къ C, такъ D къ E; и взяты величинъ
B, D равнократныя H, K; а величинъ C,
E другiя какiя ниесть равнократныя L,
M: посему какъ H къ L, такъ K къ M*. *4.
А доказано, что и какъ G къ H, такъ M
къ N: Итакъ суть три величины G, H, L,
и другiя имъ равномногiя K, M, N, взятыя
по двѣ въ томъже отношенiи, пропорцiя
же ихъ обратная: посему равномѣстно,
естьли G больше L, то и K больше N;
и естьли равна, то равна; и естьли мень-
ше, то меньше*. Но G, K равнократны *21.
величинъ A, D; а L, N величинъ C, F:
чего ради какъ A къ C, такъ D къ F*. *опр.5.

Итакъ, ежели будутъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношенiе, что и третья къ четвертой; и также пятая ко второй имѣетъ тоже отношенiе, что и шестая къ четвертой: то и совокупленно, первая съ пя-

тою ко второй будутъ имѣть тоже отношенїе, что и третья съ шестою къ четвертой.

Пусть первая величина AB ко второй C имѣетъ тоже отношенїе, что и третья DE къ четвертой F; и также пусть пятая BG ко второй C имѣетъ тоже отношенїе, что и шестая EH къ четвертой F. Говорю, что и совокупленно, первая съ пятою, то есть AG, ко второй C будетъ имѣть тоже отношенїе, что и третья съ шестою, то есть DH, къ четвертой F.

Поелику какъ BG къ C, такъ EH къ F; то преложенїемъ, какъ C къ BG, такъ F
слѣд:4. къ EH. И поелику какъ AB къ C, такъ DE къ F; и какъ C къ BG, такъ F къ EH: то равномѣстно, какъ AB къ BG, такъ DE
22. къ EH. А поелику отдѣленныя величины пропорцїональны, то и совокупленныя бу-
18. дутъ пропорцїональны; посему какъ AG къ BG, такъ DH къ HE. Но и какъ BG къ C, такъ EH къ F: чего ради равномѣстно,
22. какъ AG къ C, такъ DH къ F.

Итакъ, ежели первая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели четыре величины пропорціональны, то найбольшая съ найменьшею суть больш двухъ прочихъ.

Пусть будутъ четыре величины AB, CD, E, F пропорціональныя, то есть, какъ AB къ CD такъ E къ F; и пусть будетъ найбольшая изъ нихъ AB, а найменьшая F. Говорю, что AB, F суть больше величинъ CD, E.

Положи AG равную E, а CH равную F.

Поелику какъ AB къ CD, такъ E къ F; и E равна AG, а F равна CH: то какъ AB къ CD, такъ AG къ CH. И поелику какъ цѣлая AB къ цѣлой CD, такъ отнятая AG къ отнятой CH; то и остальная GB будетъ къ остальной HD, какъ цѣлая AB къ цѣлой CD*. Но AB больше CD; *19.
посему и GB больше HD. И поелику AG равна E, а CH равна F; то AG, F равны CH, E. А поелику, естьли къ неравнымъ приложены равныя, то и цѣлыя неравны: посему естьли, изъ неравныхъ величинъ GB, HD изъ коихъ GB большая, къ GB приложить AG, F, а къ HD приложить CH, E; то будутъ AB, F больше величинъ CD, E.

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (58).

ЭВКЛИДОВЫХЪ

НАЧАЛЪ.

КНИГА VI.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Подобныя прямолинейныя фигуры суть тѣ, которыя и всѣ углы имѣютъ равные, одинъ по одному, и около равныхъ угловъ стороны пропорціональныя. (59).

2. Обратныя же фигуры суть, когда въ каждой фигурѣ находятся предъидущіе и послѣдующіе члены отношеній. (60).

3. Прямая линія называется разсѣченною въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, когда какъ цѣлая прямая къ большему отрѣзку, такъ большій къ меньшему.

4. Высота всякой фигуры есть прямая проведенная отъ вершины перпендикулярно къ основанїю. (61)

5. Отношенїе называется сложеннымъ изъ отношенїй, когда количества сихъ отношенїй въ нихъ кратствованныя дѣлаютъ нѣкое количество. (*Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς*). (62).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Треугольники и параллелограммы, имѣющїе туже высоту, суть взаимно какъ основанїя.

Пусть будутъ ABC, ACD треугольники, а EC, CF параллелограммы, имѣющїе туже высоту, перпендикулярную прямую отъ A къ BD проведенную*. Говорю, что какъ основанїе BC къ основанїю CD, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD, и такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму CF. *опр. 4.

Продолжи BD на обѣ стороны къ точкамъ H, L; и положи сколько ниесть прямыхъ BG, GH равныхъ основанїю BC, и сколько ниесть прямыхъ DK, KL равныхъ основанїю CD; и протяни AG, AH, AK, AL.

Поелику CB, BG, GH взаимно равны, то и треугольники AHG, AGB, ABC взаимно
38,1. равны: посему сколько кратное есть основанїе HC основанїя BC, столько кратный есть и треугольникъ AHC треугольника ABC. Потомуже, сколько кратное есть основанїе CL основанїя CD, столько кратный есть и треугольникъ ALC треугольника ACD. И естьли основанїе HC равно основанїю CL, то и треугольникъ AHC
38,1. равенъ треугольнику ALC; и естьли основанїе HC больше основанїя CL, то и треугольникъ AHC больше треугольника ALC; и естьли меньше, то меньше. Итакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть, двухъ основанїй BC, CD, и двухъ треугольниковъ ABC, ACD, взяты основанїя BC и треугольника ABC равнократныя, основанїе HC и треугольникъ AHC; а основанїя CD и треугольника ACD другїя какїя ниесть равнократныя, основанїе CL и треугольникъ ALC: и доказано, что естьли основанїе HC больше основанїя CL, то и треугольникъ AHC больше треугольника ALC; и естьли равно, то равенъ; и естьли меньше, то меньше: а посему какъ основанїе BC къ основанїю CD, такъ треугольникъ ABC къ
оп.5,V. треугольнику ACD.

И поелику треугольника ABC двукратный есть параллелограммъ EC*, и треугольника ACD двукратный есть параллелограммъ FC; а частныя величины къ своимъ равнократнымъ имѣютъ тоже отношенїе*: посему какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD, такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC. Поелику же доказано, что какъ основанїе BC къ основанїю CD, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD; и что какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD, такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC: посему и какъ основанїе BC къ основанїю CD, такъ параллелограммъ EC къ параллелограмму FC*. *41,I. *15,V. *11,V.

Итакъ треугольники, и пр. ч. и д. н. (63).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели къ одной изъ сторонъ треугольника проведется какая ниесть параллельная прямая; то она разсѣчетъ прочїя стороны треугольника пропорцїонально: и ежели стороны треугольника разсѣчены пропорцїонально; то прямая протянутая чрезъ сѣченїя будетъ параллельна къ остальной сторонѣ треугольника.

Треугольника ABC къ одной изъ сторонъ

BC пусть проведена будетъ параллельная DE. Говорю, что какъ BD къ DA, такъ CE къ EA.

Протяни BE, CD.

Итакъ треугольникъ BDE равенъ тре-
37,I. угольнику CDE; ибо стоятъ на томъже основанiи DE, и между тѣмиже параллельными DE, BC: И ADE есть другой нѣкiй треугольникъ; а равныя величины къ
7,V. тойже имѣютъ тоже отношенiе: посему какъ треугольникъ BDE къ треугольнику ADE, такъ треугольникъ CDE къ треугольнику ADE. Но какъ треугольникъ BDE къ треугольнику ADE, такъ BD къ DA; ибо имѣютъ туже высоту, перпендикулярную прямую отъ E къ AB проведенную, и по-
1. тому взаимно суть какъ ихъ основанiя. Потому же какъ треугольникъ CDE къ треугольнику ADE, такъ CE къ EA: чего ради
11,V. и какъ BD къ DA, такъ CE къ EA.

Но треугольника же ABC пусть стороны AB, AC будутъ разсѣчены пропорцiонально въ точкахъ D, E, то есть, какъ BD къ DA, такъ CE къ EA; и пусть будетъ протянута DE. Говорю, что DE параллелна къ BC.

Ибо, сдѣлавъ тоже строенiе, поелику какъ BD къ DA, такъ CE къ EA: но какъ

BD къ DA, такъ треугольникъ BDE къ треугольнику ADE*; а какъ CE къ EA, такъ *1.
треугольникъ CDE къ треугольнику ADE: посему какъ треугольникъ BDE къ треугольнику ADE, такъ и треугольникъ CDE къ треугольнику ADE*. Итакъ каждый изъ *11, V.
треугольниковъ BDE, CDE къ треугольнику ADE имѣетъ тоже отношенiе: посему треугольникъ BDE равенъ треугольнику CDE*: И стоятъ они на томъже основанiи *9, V.
DE; а равные треугольники, стоящiе на томъже основанiи, суть между тѣмиже параллельными*: чего ради DE параллельна *39, I.
къ BC.

Итакъ, ежели къ одной, и проч. Ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ III.

Ежели треугольника уголъ раздѣлится по поламъ, и прямая разсѣкающая уголъ разсѣчетъ и основанiе; то основанiя отрѣзки будутъ имѣть тоже отношенiе, что прочiя стороны треугольника: И ежели основанiя отрѣзки имѣютъ тоже отношенiе, что прочiя стороны треугольника; то прямая отъ вершины къ сѣченiю протянутая, раздѣлитъ уголъ треугольника по поламъ.

Пусть будетъ ABC треугольникъ; и пусть уголъ BAC раздѣлится по поламъ прямою AD. Говорю, что какъ BD къ DC, такъ BA къ AC.

Чрезъ C проведи, параллельную къ DA,
31,I. прямую CE; и пусть продолженная BA встрѣтится съ нею въ E.

Поелику на параллельныя прямыя AD, EC падаетъ прямая AC; то уголъ ACE равенъ
29,I. углу CAD. Но уголъ CAD равенъ, по положенію, углу BAD; посему и уголъ BAD равенъ углу ACE. Еще же, поелику на параллельныя прямыя AD, EC падаетъ прямая BAE; то внѣшный уголъ BAD равенъ внутреннему AEC. А доказано, что и уголъ ACE равенъ углу BAD; посему уголъ ACE равенъ и углу AEC; слѣдственно и сторона AE
6,I. равна сторонѣ AC. И поелику къ EC, одной изъ сторонъ треугольника BCE, проведена параллельная AD; то какъ BD къ DC,
2. такъ BA къ AE. Но AE равна AC; посему
7,V. какъ BD къ DC, такъ BA къ AC:

Но пусть будетъ какъ BD къ DC, такъ BA къ AC; и пусть будетъ протянута AD. Говорю, что уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AD.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, поелику какъ BD къ DC, такъ BA къ AC: но какъ

BD къ DC, такъ и BA къ AE*; ибо къ EC, *2.
одной изъ сторонъ треугольника BCE, проведена параллельная AD: посему какъ BA къ AC, такъ BA къ AE*. Итакъ AC равна *11,V.
AE; слѣдственно и уголъ AEC равенъ углу *9,V
ACE*. Но уголъ AEC равенъ внѣшнему *5,I.
BAD*; а уголъ ACE равенъ накосьлежащему *29,I.
CAD: посему уголъ BAD равенъ углу CAD. Чего ради уголъ BAC раздѣленъ по поламъ прямою AD.

Итакъ, ежели треугольника, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Равноугольныхъ треугольниковъ стороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны: и равнымъ угламъ противулежатъ сходственныя стороны.

Пусть будутъ ABC, DCE равноугольные треугольники, имѣющіе уголъ ABC равный углу DCE, а уголъ ACB углу DEC, и еще уголъ BAC углу CDE. Говорю, что треугольниковъ ABC, DCE стороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны; и равнымъ угламъ противулежатъ сходственныя стороны.

Положи BC впрямъ съ CE. И поелику углы ABC, ACB меньше двухъ прямыхъ*; а *17,I.

уголъ ACB равенъ углу DEC: то и углы ABC, DEC меньше двухъ прямыхъ; посему
акс.11. прямыя BA, ED продолженныя встрѣтятся. Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся въ F.

Поелику уголъ DCE равенъ углу ABC; то
28,I. BF параллельна къ CD. Еще же, поелику уголъ ACB равенъ углу DEC; то AC параллельна къ FE. Итакъ FACD есть параллелограммъ; и потому FA равна DC; а AC
34,I. равна FD. И поелику къ FE, одной изъ сторонъ треугольника FBE, проведена параллельная AC; то какъ BA къ AF, такъ
2. BC къ CE. Но AF равна CD: посему какъ
7,V. BA къ CD, такъ BC къ CE; и премѣне-
16,V. нїемъ; какъ AB къ BC, такъ DC къ CE. Еще же, поелику CD параллельна къ BF; то какъ BC къ CE, такъ FD къ DE. Но FD равна AC: посему какъ BC къ CE, такъ AC къ ED; и премѣненїемъ, какъ BC къ CA, такъ CE къ ED. Поелику же доказано, что какъ AB къ BC, такъ DC къ CE; а какъ BC къ CA, такъ CE къ ED: чего ради равно-
22,V. мѣстно, какъ BA къ AC, такъ CD къ DE.

Итакъ равноугольныхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Ежели два треугольника имѣютъ стороны пропорціональныя: то они будутъ равноугольные; и будутъ имѣть равные углы тѣ, коимъ противулежатъ сходственныя стороны.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющіе стороны пропорціональныя, а именно: какъ AB къ BC, такъ DE къ EF; и какъ BC къ CA, такъ EF къ FD; и еще, какъ BA къ AC, такъ ED къ DF. Говорю, что треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF; и что они будутъ имѣть равные углы тѣ, коимъ противулежатъ сходственныя стороны, то есть: уголъ ABC углу DEF, а уголъ BCA углу EFD; и еще, уголъ BAC углу EDF.

При прямой EF, и при точкахъ на ней E, F, составь уголъ FEG равный углу ABC*, *23,I.
а уголъ EFG равный углу BCA: посему остальной уголъ BAC равенъ остальному EGF*. *32,I.

Итакъ треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику GEF. Посему треугольниковъ ABC, EGF стороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональны; и равнымъ угламъ противулежатъ сход-

4. ственныя стороны : а посему какъ AB къ BC, такъ GE къ EF. Но какъ AB къ BC, такъ, по положенію, DE къ EF; посему и
11,V. какъ DE къ EF, такъ GE къ EF. Итакъ каждая изъ прямыхъ DE, GE къ EF имѣетъ
9,V. тоже отношеніе; посему DE равна GE. Потому же и DF равна GF. И поелику DE равна EG, а EF общая; то двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ GE, EF; и основаніе FD равно основанію FG:
8,I. посему уголъ DEF равенъ углу GEF: И треугольникъ DEF равенъ треугольнику GEF; и прочіе углы равны прочимъ угламъ,
4,I. кои противулежатъ равнымъ сторонамъ: посему уголъ DFE равенъ углу GFE; и уголъ EDF равенъ углу EGF. И поелику уголъ FED равенъ углу FEG; а уголъ GEF равенъ углу ABC: то уголъ ABC равенъ углу DEF. Потому же и уголъ ACB равенъ углу DFE; и еще, уголъ при A равенъ углу при D. Чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.

Итакъ, ежели два треугольника, и пр. Ч. И. Д. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели два треугольника имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, и около ра-

вныхъ угловъ стороны пропорціональныя: то треугольники будутъ равноугольные; и будутъ имѣть равные углы тѣ, коимъ противулежатъ сходственныя стороны.

Пусть будутъ ABC, DEF два треугольника, имѣющіе одинъ уголъ BAC равный одному углу EDF; и около равныхъ угловъ стороны пропорціональныя, а именно: какъ BA къ AC, такъ ED къ DF. Говорю, что треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF; и будетъ уголъ ABC равенъ углу DEF, а уголъ ACB равенъ углу DFE.

При прямой DF, и при точкахъ на ней D, F, составь уголъ FDG равный которому ниесть изъ угловъ BAC, EDF, а уголъ DFG равный углу ACB: посему остальной уголъ при B равенъ остальному углу при G*. *32,I.

Итакъ треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DGF: посему какъ BA къ AC, такъ GD къ DF*. А по положенію, какъ BA къ AC, такъ ED къ DF: посему *4.
какъ ED къ DF, такъ и GD къ DF*. Чего *11,V.
ради ED равна DG*; а DF общая: итакъ *9,V.
двѣ прямыя ED, DF равны двумъ прямымъ GD, DF; и уголъ EDF равенъ углу GDF: посему основаніе EF равно основанію FG; и треугольникъ DEF равенъ треугольнику DGF; и прочіе углы равны будутъ прочимъ

угламъ, каждый каждому, кои противуле-
4,1. жатъ равнымъ сторонамъ: посему уголъ DFG равенъ углу DFE; и уголъ при G равенъ углу при E. Но уголъ DFG равенъ углу ACB; посему и уголъ ACB равенъ углу DFE. А по положенію, и уголъ BAC равенъ углу EDF; посему и остальной уголъ при B равенъ остальному углу при E. Чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.

Итакъ, ежели два треугольника, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели два треугольника имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, и около другихъ угловъ стороны пропорціональныя; и ежели изъ остальныхъ угловъ каждый меньше, или не меньше прямаго: то треугольники будутъ равноугольные; и будутъ имѣть равные углы тѣ, около которыхъ стороны пропорціональны.

Пусть будутъ два треугольника ABC, DEF, имѣющіе одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAC углу EDF; и около другихъ угловъ ABC, DEF стороны пропорціональныя, а именмо: какъ AB къ

BC, такъ DE къ EF; и пусть изъ остальныхъ угловъ, то есть, кои при C, F, будетъ каждый, вопервыхъ, меньше прямаго. Говорю, что треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF; и будетъ уголъ ABC равенъ углу DEF, и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F.

Ибо, буде уголъ ABC не равенъ углу DEF; то одинъ изъ нихъ большій. Пусть будетъ уголъ ABC большій. При прямой AB, и при точкѣ на ней B, составь уголъ ABG равный углу DEF.

Поелику уголъ A равенъ углу D, а уголъ ABG равенъ углу DEF; то и остальной уголъ AGB равенъ остальному углу DFE. Итакъ треугольникъ ABG есть равноугольный треугольнику DEF; посему какъ AB къ BG, такъ DE къ EF.* Но какъ DE къ EF, *4.
такъ, по положенію, AB къ BC; посему и
какъ AB къ BC, такъ AB къ BG*. Итакъ AB *11,V.
къ каждой изъ прямыхъ BC, BG имѣетъ
тоже отношеніе; посему BC равна BG*; *9,V.
слѣдственно и уголъ BGC равенъ углу BCG*. *5,I.
А по положенію, уголъ при C меньше прямаго; посему и уголъ BGC меньше прямаго; слѣдственно смѣжный ему уголъ AGB
есть больше прямаго*. Доказано же, что *13,I.
онъ равенъ углу при F; посему и уголъ при F

есть больше прямаго. А по положенїю онъ меньше прямаго: что нелѣпо; посему уголъ ABC не неравенъ углу DEF; слѣдственно равенъ. Но уголъ при A равенъ углу при D; посему и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F: чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.

Но пусть еще будетъ каждый изъ угловъ, кои при C, F, не меньше прямаго. Говорю еще, что и тогда треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.

Ибо, сдѣлавъ тоже строенїе, подобно докажемъ, что BC равна BG; слѣдственно и уголъ при C равенъ углу BGC. Но уголъ при C не меньше прямаго; посему не меньше прямаго и уголъ BGC. Итакъ треугольника BGC два угла суть не меньше двухъ пря-
17,1. мыхъ, что невозможно; посему опять не будетъ уголъ ABC неравенъ углу DEF; слѣдственно равенъ. Но и уголъ при A равенъ углу при D; посему и остальной уголъ при C равенъ остальному углу при F: чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DEF.

Итакъ, ежели два треугольника, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямаго угла къ основанію проведена перпендикулярная; то треугольники, кои при перпендикулярной, подобны суть и цѣлому треугольнику и взаимно.

Пусть будетъ ABC прямоугольный треугольникъ, имѣющій уголъ BAC прямой; и пусть отъ A проведена будетъ къ BC перпендикулярная AD. Говорю, что каждый изъ треугольниковъ ABD, ADC подобенъ цѣлому треугольнику ABC, и также подобны суть взаимно.

Поелику уголъ BAC равенъ углу ADB, ибо каждый изъ нихъ прямой; и общій двумъ треугольникамъ ABC и ABD есть уголъ при B; посему остальной уголъ ACB равенъ остальному BAD: чего ради треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику ABD. Посему какъ BC, противулежащая прямому углу треугольника ABC, къ BA, противулежащей прямому углу треугольника ABD; такъ та же AB, противулежащая углу при C треугольника ABC, къ BD, противулежащей углу, коему равенъ уголъ при C, то есть углу BAD треугольника ABD; и такъ же AC къ AD, противулежащей углу

4. при B, общему обоимъ треугольникамъ. Итакъ треугольникъ ABC и равноугольный есть треугольнику ABD, и около равныхъ угловъ имѣетъ стороны пропорціональныя; слѣдственно треугольникъ ABC
опр. 1. подобенъ треугольнику ABD. Подобно докажемъ, что и треугольникъ ADC подобенъ треугольнику ABC. Чего ради каждый изъ треугольниковъ ABD, ADC подобенъ цѣлому треугольнику ABC.

Говорю еще, что треугольники ABD, ADC подобны и взаимно.

Поелику прямой уголъ BDA равенъ прямому углу ADC; а и уголъ BAD равенъ углу при C, по доказанному: посему остальной уголъ при B равенъ остальному DAC: чего ради треугольникъ ABD есть равноугольный треугольнику ADC. Посему какъ BD, сторона треугольника ABD, противулежащая углу BAD, къ DA, сторонѣ треугольника ADC, противулежащей углу при C равному BAD; такъ та же AD, сторона треугольника ABD, противулежащая углу при B, къ DC, сторонѣ треугольника ADC, противулежащей углу DAC равному углу при B; и такъ же BA, противулежащая прямому углу ADB, къ AC, противулежащей прямому углу ADC. Чего ради треугольникъ

ABD подобенъ треугольнику ADC.

Итакъ, ежели въ прямоугольномъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что есть-ли въ прямоугольномъ треугольникѣ отъ прямаго угла къ основанію проведена будетъ перпендикулярная: то проведенная есть средняя пропорціональная отрѣзкамъ основанія; и также сторона при которомъ ниесть отрѣзкѣ, есть средняя пропорціональная основанію и оному отрѣзку.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Отъ данной прямой отнять назначенную часть.

Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ отъ прямой AB отнять назначенную часть.

Пусть назначена будетъ третья. Проведи отъ A прямую AC, содержащую какой ниесть уголъ съ прямою AB; и возьми на AC какую ниесть точку D; и положи прямыя DE, EC равныя прямой AD*; и протяни BC; и чрезъ D проведи, параллельную къ BC, прямую DF*. *3,I. *31,I.

Поелику къ BC, одной изъ сторонъ тре-

угольника ABC, проведена параллельная FD:
2. то какъ CD къ DA, такъ BF къ FA. Но CD есть двукратная прямой DA; посему и BF двукратная прямой FA. Чего ради BA есть трекратная прямой AF.

Итакъ отъ данной прямой AB отнята назначенная третья часть, прямая AF. ч. и с. н. (64).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Данную неразсѣченную прямую разсѣчь подобно данной разсѣченной прямой.

Пусть будетъ AB данная неразсѣченная прямая, а AC разсѣченная. Надлежитъ неразсѣченную AB разсѣчь подобно разсѣченной AC.

Пусть разсѣчена будетъ AC въ точкахъ D, E. Положи прямыя AB, AC, такъ чтобы онѣ содержали какой ниесть уголъ; и протяни CB; и чрезъ D E проведи, параллельныя къ BC, прямыя DF, EG; и чрезъ D же проведи, параллельную къ AB, прямую DHK.

Итакъ каждый изъ четыреугольниковъ FH, HB есть параллелограммъ; посему DH
34,1. равна FG, а HK равна GB. И поелику къ KC, одной изъ сторонъ треугольника DKC, проведна параллельная HE; то какъ CE къ

ED, такъ KH къ HD*. Но KH равна BG, а *2.
HD равна GF; посему какъ CE къ ED, такъ
BG къ GF*. Еще же, поелику къ EG, одной *7 и 11, V.
изъ сторонъ треугольника AGE, проведена параллельная FD; то какъ ED къ DA, такъ GF къ FA. А доказано, что какъ CE къ ED, такъ BG къ GF: чего ради, какъ CE къ ED, такъ BG къ GF; и какъ ED къ DA, такъ GF къ FA.

Итакъ данная неразсѣченная прямая AB разсѣчена подобно данной разсѣченной прямой AC. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Двумъ даннымъ прямымъ найти третью пропорціональную.

Пусть будутъ AB, AC двѣ данныя прямыя; и пусть положены будутъ такъ, чтобы содержали какой ниесть уголъ. Надлежитъ найти прямымъ AB, AC третью пропорціональную.

Продолжи AB, AC къ точкамъ D, E; и положи прямую BD равную AC; и протяни BC; и чрезъ D проведи къ ней параллельную DE.

Поелику къ DE, одной изъ сторонъ треугольника ADE, проведена параллельная BC;

2. то какъ AB къ BD, такъ AC къ CE. Но BD равна AC: чего ради какъ AB къ AC,
7 и 11, V. такъ AC къ CE.

Итакъ двумъ даннымъ прямымъ AB, AC найдена третья пропорціональная CE. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Тремъ даннымъ прямымъ найти четвертую пропорціональную.

Пусть будутъ A, B, C три данныя прямыя. Надлежитъ найти прямымъ A, B, C четвертую пропорціональную.

Проведи двѣ прямыя DE, DF содержащія какой ниесть уголъ EDF; и положи прямую DG равную A, и прямую GE равную B, и еще прямую DH равную C; и протянувъ GH, проведи чрезъ E къ ней параллельную EF.

Поелику къ EF, одной изъ сторонъ треугольника DEF, проведена параллельная GH;
2. то какъ DG къ GE, такъ DH къ HF. Но DG равна A, а GE равна B, и DH равна C: чего ради какъ A къ B, такъ C къ HF.

Итакъ тремъ даннымъ прямымъ A, B, C найдена четвертая пропорціональная HF. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Двумъ даннымъ прямымъ найти среднюю пропорціональную.

Пусть будутъ AB, BC двѣ данныя прямыя. Надлежитъ найти прямымъ AB, BC среднюю пропорціональную.

Положи ихъ вирямъ; и напиши на AC полукружіе ADC; и проведи отъ точки B, подъ прямыми углами къ AC, прямую BD; и протяни AD, DC.

Поелику уголъ ADC есть въ полукружіи, то онъ прямой*. И поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ ADC, отъ прямаго угла къ основанію проведена перпендикулярная DB; то DB есть средняя пропорціональная основанія отрѣзкамъ AB, BC*. *31, III. *слѣ:8.

Итакъ двумъ даннымъ прямымъ AB, BC найдена средняя пропорціональная BD. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Равныхъ параллелограммовъ и имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя: И которыхъ параллелограммовъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный

одному углу, стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равные.

Пусть будутъ AB, BC равные параллелограммы; имѣющіе углы при B равные. Положи впрямъ DB, BE; посему и FB, BG
14,I. будутъ впрямъ. Говорю, что параллелограммовъ AB, BC стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя, то есть, что какъ DB къ BE, такъ GB къ BF.

Дополни параллелограммъ FE.

Поелику параллелограммъ AB равенъ параллелограмму BC; а FE есть другой нѣкій параллелограммъ: то какъ AB къ FE, такъ
7,V. BC къ FE. Но какъ AB къ FE, такъ DB къ
1. BE; а какъ BC къ FE, такъ GB къ BF*: посему какъ DB къ BE, такъ GB къ BF. Чего ради параллелограммовъ AB, BC стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя.

Но пусть будутъ стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональныя, то есть, пусть будетъ какъ DB къ BE, такъ GB къ BF. Говорю, что параллелограммъ AB равенъ параллелограмму BC.

Поелику какъ DB къ BE, такъ GB къ BF; но какъ DB къ BE, такъ параллело-
1. граммъ AB къ параллелограмму FE; а какъ

GB къ BF, такъ параллелограммъ BC къ параллелограмму FE: посему какъ AB къ FE, такъ BC къ FE*. Чего ради параллелограммъ AB равенъ параллелограмму BC*. *11,V. *9,V.

Итакъ равныхъ параллелограммовъ, и пр. ч. и д. н. (65).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Равныхъ треугольниковъ и имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональны: И которыхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равные.

Пусть будутъ ABC, ADE равные треугольники, имѣющіе одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAC углу DAE. Говорю, что треугольниковъ ABC, ADE стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя, то есть, что какъ CA къ AD, такъ EA къ AB.

Положи впрямъ CA съ AD, посему будетъ впрямъ и EA съ AB*; и протяни BD. *14,I.

Поелику треугольникъ ABC равенъ треугольнику ADE; а ABD есть другой нѣкій треугольникъ: то какъ треугольникъ CAB

къ треугольнику BAD, такъ треугольникъ
7,V. ADE къ треугольнику BAD. Но какъ треугольникъ CAB къ треугольнику BAD, такъ
1. CA къ AD; а какъ треугольникъ EAD къ треугольнику BAD, такъ EA къ AB: посему
11,V. какъ CA къ AD, такъ EA къ AB. Чего ради треугольниковъ ABC, ADE стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя.

Но пусть будутъ треугольниковъ ABC, ADE стороны обратно пропорціональныя, то есть, какъ CA къ AD, такъ EA къ AB. Говорю, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику ADE.

Ибо, протянувъ опять BD, поелику какъ CA къ AD, такъ EA къ AB; но какъ CA къ AD, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику
1. BAD; а какъ EA къ AB, такъ треугольникъ EAD къ треугольнику BAD: посему какъ треугольникъ ABC къ треугольнику BAD, такъ треугольникъ EAD къ тре-
11,V. угольнику BAD. Итакъ каждый изъ треугольниковъ ABC, ADE къ треугольнику BAD имѣетъ тоже отношеніе: чего ради тре-
9,V. угольникъ ABC равенъ треугольнику EAD.

Итакъ равныхъ треугольниковъ, и проч. ч. и д. н. (66).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели четыре прямыя пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ: И ежели прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ; то сіи четыре прямыя будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ четыре прямыя AB, CD, E, F пропорціональныя, то есть, какъ AB къ CD, такъ E къ F. Говорю, что прямоугольникъ содержимый въ AB, F равенъ прямоугольнику содержимому въ CD, E.

Проведи отъ точекъ A, C, подъ прямыми углами къ AB, CD, прямыя AG, CH; и положи прямую AG равную F, а прямую CH равную E; и дополни параллелограммы BG, DH.

Поелику какъ AB къ CD, такъ E къ F; но E равна CH, а F равна AG: то какъ AB къ CD, такъ CH къ AG*; посему параллелограммовъ BG, DH стороны, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціональныя. А которыхъ равноугольныхъ параллелограммовъ стороны около равныхъ угловъ обратно пропорціональны, тѣ суть равные*; посему параллелограммъ BG равенъ параллелограмму DH. Но BG есть прямоуголь- *7 VII, V. *14.

никъ въ AB, F, ибо AG равна F; а DH есть прямоугольникъ въ CD, E, ибо CH равна E: чего ради прямоугольникъ содержимый въ AB, F равенъ прямоугольнику содержимому въ CD, E.

Но пусть прямоугольникъ содержимый въ AB, F будетъ равенъ прямоугольнику содержимому въ CD, E. Говорю, что сіи четыре прямыя будутъ пропорціональныя; а именно, какъ AB къ CD, такъ E къ F.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, поелику прямоугольникъ въ AB, F равенъ прямоугольнику въ CD, E: но прямоугольникъ въ AB, F есть BG, ибо AG равна F; а прямоугольникъ въ CD, E есть DH, ибо CH равна E: посему прямоугольникъ BG равенъ прямоугольнику DH. Они же и равноугольные: А равныхъ и равноугольныхъ параллелограммовъ стороны около равныхъ угловъ суть обратно пропорціональ-
14. ныя: посему какъ AB къ CD, такъ CH къ AG. Но CH равна E, а AG равна F: чего ради
7 III, V. какъ AB къ CD, такъ E къ F.

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (67).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели три прямыя пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ

равенъ квадрату изъ средней: И ежели прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ квадрату изъ средней; то сіи три прямыя будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ три прямыя A, B, C пропорціональныя, то есть, какъ A къ B, такъ B къ C. Говорю, что прямоугольникъ содержимый въ A, C равенъ квадрату изъ B.

Положи прямую D равную B.

Поелику какъ A къ B, такъ B къ C; но B равна D: то какъ A къ B, такъ D къ C*. А естьли четыре прямыя пропорціональны; то прямоугольникъ содержимый въ крайнихъ равенъ прямоугольнику содержимому въ среднихъ*: посему прямоугольникъ въ A, C равенъ прямоугольнику въ B, D. Но прямоугольникъ въ B, D равенъ квадрату изъ B, ибо B равна D: чего ради прямоугольникъ содержимый въ A, C равенъ квадрату изъ B. *7 III, V. *16.

Но пусть прямоугольникъ въ A, C будетъ равенъ квадрату изъ B. Говорю, что какъ A къ B, такъ B къ C.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, поелику прямоугольникъ въ A, C равенъ квадрату изъ B; но квадратъ изъ B равенъ прямоугольнику въ B, D, ибо B равна D: посему прямоугольникъ въ A, C равенъ прямоугольнику въ B, D. А естьли прямоугольникъ въ крайнихъ

равенъ прямоугольнику въ среднихъ; то сіи четыре прямыя пропорціональны*: посему какъ A къ B, такъ D къ C. Но B равна D: чего ради какъ A къ B, такъ B къ C. Итакъ, ежели три прямыя, ипр. ч. и д. н. (68).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Изъ данной прямой написать прямолинейную фигуру подобную данной прямолинейной фигурѣ и подобно положенную.

Пусть будетъ AB данная прямая, а CE данная прямолинейная фигура. Надлежитъ изъ прямой AB написать прямолинейную фигуру подобную прямолинейной фигурѣ CE и подобно положенную.

Протяни DF; и составь при прямой AB и при точкахъ на ней A, B, уголъ GAB равный углу C, а уголъ ABG равный углу CDF: посему остальной уголъ CFD равенъ остальному AGB. Итакъ треугольникъ FCD есть
32,1. равноугольный треугольнику GAB; а посему
какъ FD къ GB, такъ FC къ GA, и такъ
4. CD къ AB. Еще же, составь при прямой BG и при точкахъ на ней B, G, уголъ BGH равный углу DFE, а уголъ GBH равный углу FDE: посему остальной уголъ при E равенъ остальному углу при H. Итакъ треуголь-

никъ FDE есть равноугольный треугольнику GBH; а посему какъ DF къ GB, такъ FE къ GH, и такъ ED къ HB. А доказано, что какъ FD къ GB, такъ и FC къ GA, и такъ CD къ AB; посему и какъ FC къ AG, такъ и CD къ AB, и такъ FE къ GH, и еще, такъ ED къ HB*. И поелику уголъ *11,V. CFD равенъ углу AGB, и уголъ DFE углу BGH; посему цѣлый уголъ CFE равенъ цѣлому углу AGH. Потому же и уголъ CDE равенъ углу ABH. И еще уголъ при C равенъ углу при A, а уголъ при E углу при H: посему фигура AH равноугольна фигурѣ CE, и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть пропорцїональныя; чего ради фигура AH подобна фигурѣ CE*. *опр. I.

Итакъ, изъ данной прямой AB написана прямолинейная фигура AH подобная данной прямолинейной фигурѣ CE и подобно положенная. Ч. И С. Н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Подобные треугольники взаимно суть въ удвоенномъ отношенїи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ треугольники ABC, DEF подобные, имѣющїе уголъ при B равный

углу при E; и AB къ BC какъ DE къ EF, такъ что сторона BC есть сходственная съ EF. Говорю, что треугольникъ ABC къ треугольнику DEF имѣетъ удвоенное отношенїе стороны BC къ сторонѣ EF.

Возьми прямымъ BC, EF третью пропорцїональную BG, такъ чтобъ было, какъ
11. BC къ EF, такъ EF къ BG; и протяни GA.

Поелику какъ AB къ BC, такъ DE къ EF; то премѣненїемъ, какъ AB къ DE, такъ
16,V. BC къ EF. Но какъ BC къ EF, такъ EF къ BG; посему и какъ AB къ DE, такъ EF къ
11,V. BG; а посему треугольниковъ ABG, DEF стороны около равныхъ угловъ суть обратно пропорцїональныя. А которыхъ треугольниковъ, имѣющихъ одинъ уголъ равный одному углу, стороны около равныхъ угловъ обрат-
15. но пропорцїональны, тѣ суть равные; посему треугольникъ ABG равенъ треугольнику DEF. И поелику какъ BC къ EF, такъ EF къ BG; а естьли три прямыя пропорцїональны, то говорится, что первая къ третьей имѣетъ удвоенное отношенїе первыя ко
оп.10,V. второй: посему BC къ BG имѣетъ удвоенное отношенїе прямыя BC къ EF. А какъ BC къ BG, такъ треугольникъ ABC къ тре-
1. угольнику ABG; посему и треугольникъ ABC къ треугольнику ABG имѣетъ удвоенное

отношенїе прямыя BC къ EF. Но треугольникъ ABG равенъ треугольнику DEF: чего ради и треугольникъ ABC къ треугольнику DEF имѣетъ удвоенное отношенїе прямыя BC къ EF*. *7,V.

Итакъ, подобные, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствiе. Откуда явствуетъ, что естьли три прямыя пропорцїональны; то какъ первая къ третьей, такъ треугольникъ изъ первой къ треугольнику подобному и подобно написанному изъ второй: поелику доказано, что какъ CB къ BG, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику ABG, то есть къ треугольнику DEF.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XX.

Подобные многоугольники раздѣлять можно на подобные треугольники, равномногїе, и сходственные съ цѣлыми многоугольниками; И многоугольникъ къ многоугольнику имѣетъ удвоенное отношенїе сходственныя стороны къ сходственной сторонѣ.

Пусть будутъ многоугольники ABCDE, FGHKL подобные; и пусть будетъ сторона AB сходственная съ FG. Говорю, что многоугольники ABCDE, FGHKL раздѣлять

можно на подобные треугольники, равномногіе, и сходственные съ цѣлыми многоугольниками; и что многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL имѣетъ удвоенное отношеніе прямыя AB къ FG.

Протяни BE, EC, GL, LH.

Поелику многоугольникъ ABCDE подобенъ многоугольнику FGHKL: то уголъ BAE равенъ углу GFL; и какъ BA къ AE, такъ
опр. 1. FG къ FL. Итакъ, поелику два треугольника ABE, FGL имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, и стороны около равныхъ угловъ пропорціональныя: то треугольникъ
6. ABE есть равноугольный треугольнику FGL,
4. слѣдственно и подобенъ ему; посему уголъ ABE равенъ углу FGL. Но и цѣлый уголъ ABC равенъ цѣлому FGH, по подобію многоугольниковъ; посему остальной уголъ EBC равенъ остальному LGH. И поелику, по подобію треугольниковъ ABE, FGL, какъ EB къ BA, такъ LG къ GF; а по подобію многоугольниковъ, какъ AB къ BC, такъ FG къ GH: то равномѣстно, какъ EB къ BC,
22, V. такъ LG къ GH; то есть, около равныхъ угловъ EBC, LGH стороны пропорціональны; посему треугольникъ EBC есть равноуголь-
6. ный треугольнику LGH, слѣдственно и по-
4. добенъ ему. Потому же и треугольникъ ECD

подобенъ треугольнику LHK. Итакъ подобные многоугольники ABCDE, FGHKL раздѣлены на подобные треугольники равномногіе.

Говорю же, что сіи треугольники сходственны съ цѣлыми многоугольниками, то есть пропорціональны имъ; и что предъидущіе суть ABE, EBC, ECD, а послѣдующіе ихъ FGL, LGH, LHK; и что многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть AB къ FG.

Протяни AC, FH.

Поелику, по подобію многоугольниковъ, и уголъ ABC равенъ углу FGH, и какъ AB къ BC такъ FG къ GH: то треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику FGH*; по- *6.
сему уголъ BAC равенъ углу GFH, а уголъ BCA углу GHF. И поелику уголъ BAM равенъ углу GFN; доказано же, что и уголъ ABM равенъ углу FGN: посему и остальной уголъ AMB равенъ остальному FNG*; и потому тре- *32,1.
угольникъ ABM есть равноугольный треугольнику FGN. Подобно докажемъ, что и треугольникъ BMC есть равноугольный треугольнику GNH. Чего ради, какъ AM къ MB, такъ FN къ NG; и какъ BM къ MC,

4. такъ GN къ NH: слѣдственно, и равно-
22,V. мѣстно, какъ AM къ MC, такъ FN къ NH.
Но какъ AM къ MC, такъ треугольникъ ABM
къ треугольнику MBC, и такъ треугольникъ
AME къ треугольнику EMC, ибо они суть
взаимно какъ основанія; и какъ одинъ предъ-
идущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ
12,V. предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ: по-
сему какъ треугольникъ AMB къ треуголь-
нику BMC, такъ треугольникъ ABE къ
треугольнику CBE. Но какъ треугольникъ
AMB къ треугольнику BMC, такъ AM къ
MC; посему и какъ AM къ MC, такъ тре-
11,V. угольникъ ABE къ треугольнику EBC. По-
тому же и какъ FN къ NH, такъ треуголь-
никъ FGL къ треугольнику GLH. Поелику же
какъ AM къ MC, такъ FN къ NH: посему и
какъ треугольникъ ABE къ треугольнику BEC,
такъ треугольникъ FGL къ треугольнику
11,V. GHL; и премѣненіемъ, какъ треугольникъ
ABE къ треугольнику FGL, такъ треуголь-
16,V. никъ BEC къ треугольнику GLH. Подобно
докажемъ, протянувъ BD, GK, что какъ тре-
угольникъ BEC къ треугольнику GLH, такъ
треугольникъ ECD къ треугольнику LHK.
И поелику какъ треугольникъ ABE къ тре-
угольнику FGL, такъ EBC къ LGH, и еще
такъ ECD къ LHK: то и какъ одинъ предъ-

идущій къ одному послѣдующему, такъ всѣ предъидущіе ко всѣмъ послѣдующимъ*; посему какъ треугольникъ ABE къ треугольнику FGL, такъ многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL. Но треугольникъ ABE къ треугольнику FGL имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной стороны AB къ сходственной сторонѣ FG; ибо подобные треугольники суть въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: чего ради и многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL имѣетъ удвоенное отношеніе сходственной стороны AB къ сходственной сторонѣ FG. *12, V. *19.

Итакъ подобные, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе I. Такимъ же образомъ докажется и о подобныхъ четыреугольникахъ, что они суть въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ. Доказано же сіе и о треугольникахъ: слѣдственно вообще подобныя прямолинейныя фигуры суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ.

Слѣдствіе II. Ежели прямымъ AB, FG возьмемъ третью пропорціональную O; то AB къ O имѣетъ удвоенное отношеніе прямыя AB къ FG*. А и многоугольникъ къ многоугольнику и четыреугольникъ къ четыре- *оп. 10, V.

угольнику имѣетъ удвоенное отношенїе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть AB къ FG; доказано же
19. сїе и о треугольникахъ: слѣдственно и вообще явствуетъ, что естьли три прямыя пропорцїональны; то будетъ какъ первая къ третьей, такъ прямолинейная фигура изъ первой къ прямолинейной фигурѣ подобной и подобно написанной изъ второй. (69).

ИНАЧЕ. Мы докажемъ иначе и короче, что треугольники суть сходственные.

Изложи еще многоугольники ABCDE, FGHKL; и протяни BE, EC, GL, LH. Говорю, что какъ треугольникъ ABE къ треугольнику FGL, такъ EBC къ LGH, и такъ CDE къ HKL.

Поелику треугольникъ ABE подобенъ треугольнику FGL; то треугольникъ ABE къ треугольнику FGL имѣетъ удвоенное от-
19. ношенїе прямыя BE къ GL. Потому же и треугольникъ BEC къ треугольнику GLH имѣетъ удвоенное отношенїе прямыя BE къ GL: чего ради какъ треугольникъ ABE къ треугольнику FGL, такъ EBC къ LGH. Еще же, поелику треугольникъ EBC подобенъ треугольнику LGH; то треугольникъ EBC къ треугольнику LGH имѣетъ

удвоенное отношенїе прямыя CE къ HL. Потому же и треугольникъ ECD къ треугольнику LHK имѣетъ удвоенное отношенїе прямыя CE къ HL: чего ради какъ треугольникъ EBC къ треугольнику LGH, такъ ECD къ LHK*. А доказано, что какъ *11,V.
EBC къ LGH, такъ и ABE къ FGL; слѣдственно какъ ABE къ FGL, такъ BEC къ GLH, и такъ ECD къ LHK. И потому какъ одинъ предъидущїй къ одному послѣдующему, такъ всѣ предъидущїе ко всѣмъ послѣдующимъ, и прочее какъ въ первомъ показано. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Прямолинейныя фигуры, подобныя тойже прямолинейной фигурѣ, суть и взаимно подобны.

Пусть будетъ каждая изъ прямолинейныхъ фигуръ A, B подобна фигурѣ C. Говорю, что и A подобна B.

Поелику фигура A подобна фигурѣ C: то онѣ равноугольны; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть пропорцїональныя*. Еще же, поелику фигура B подобна *опр. 1
фигурѣ C: то онѣ равноугольны; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть

опр. 1. пропорціональныя. Посему каждая изъ фигуръ A, B фигурѣ C равноугольна; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональныя: и слѣдственно фигура A равноугольна фигурѣ B; и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, *11. V. суть пропорціональныя*. Итакъ фигура A подобна фигурѣ B. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели четыре прямыя суть пропорціональны; то и прямолинейныя фигуры подобныя и подобно изъ нихъ написанныя, будутъ пропорціональны: И ежели прямолинейныя фигуры подобныя и подобно изъ четырехъ прямыхъ написанныя суть пропорціональны; то и самыя прямыя будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ четыре прямыя AB, CD, EF, GH пропорціональныя, то есть, какъ AB къ CD, такъ EF къ GH; и пусть будутъ написаны изъ прямыхъ AB, CD подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры KAB, LCD; а изъ прямыхъ EF, GH подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры MF, NH. Говорю, что

какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD, такъ фигура MF къ фигурѣ NH.

Возьми прямымъ AB, CD третью пропорціональную O*; а прямымъ EF, GH третью *11.
пропорціональную P. Поелику какъ AB къ CD, такъ EF къ GH; а какъ CD къ O, такъ GH къ P: то равномѣстно, какъ AB къ O, такъ EF къ P*. Но какъ AB къ O, *22,V.
такъ фигура KAB къ фигурѣ LCD*; а какъ *сл.2,26
EF къ P, такъ фигура MF къ фигурѣ NH: чего ради какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD, такъ фигура MF къ фигурѣ NH*. *11,V.

Но пусть будетъ какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD, такъ фигура MF къ фигурѣ NH. Говорю, что какъ AB къ CD, такъ EF къ GH.

Сдѣлай какъ AB къ CD, такъ EF къ QR*; *12.
и напиши изъ QR прямолинейную фигуру SR*, подобную каждой изъ фигуръ MF, NH *:8.
и подобно положенную.

Поелику какъ AB къ CD, такъ EF къ QR; и написаны изъ прямыхъ AB, CD подобныя и подобно положенныя фигуры KAB, LCD; а изъ прямыхъ EF, QR подобныя и подобно положенныя фигуры MF, SR: то какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD, такъ фигура MF къ фигурѣ SR. А по положенію, какъ фигура KAB къ фигурѣ LCD, такъ фигура

MF къ фигурѣ NH; посему фигура MF къ каждой изъ фигуръ NH, SR имѣетъ тоже
11,V. отношенїе; а посему фигура NH равна фи-
9,V. гурѣ SR. Но она ей подобна и подобно по-
лемма. ложенная; посему GH равна QR. И поелику какъ AB къ CD, такъ EF къ QR; а QR равна GH: посему какъ AB къ CD, такъ
7и11,V. EF къ GH.

Итакъ, ежели четыре, и пр. ч. и д. н. (70).

Лемма. А что, ежели прямолинейныя фигуры равны и подобны, то сходственныя ихъ стороны взаимно равны, мы сїе такъ докажемъ:

Пусть будутъ фигуры NH, SR равныя и подобныя; и пусть будутъ какъ HG къ GN, такъ RQ къ QS. Говорю, что RQ равна HG.

Буде же онѣ неравны; то одна изъ нихъ больше. Пусть будетъ RQ больше GH. Поелику какъ RQ къ QS, такъ HG къ GN; то и премѣненїемъ, какъ RQ къ HG, такъ
16,V. QS къ GN. Но QR больше HG; посему и QS больше GN; слѣдственно RS больше HN. Но и равна ей: что невозможно. Чего ради QR не неравна GH; слѣдственно равна ей. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Равноугольные параллелограммы взаимно имѣютъ отношеніе сложенное изъ отношеній сторонъ, « кои около равныхъ угловъ ».

Пусть будутъ AC, CF, равноугольные параллелограммы, имѣющіе уголъ BCD равный углу ECG. Говорю, что параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имѣетъ отношеніе сложенное изъ « отношеній » сторонъ, кои около равныхъ угловъ, то есть, изъ отношенія какое имѣетъ BC къ CG, и отношенія какое имѣетъ DC къ CE.

Положи впрямъ BC съ CG, то будетъ впрямъ и DC съ CE*; и дополни параллелограммъ DG; и изложи какую ниесть прямую K; и сдѣлай какъ BC къ CG, такъ K къ L*, а какъ DC къ CE, такъ L къ M*. *14, 1. *12.

Итакъ отношенія K къ L, и L къ M суть тѣже съ отношеніями сторонъ, BC къ CG, и DC къ CE. Но отношеніе K къ M сложенно изъ отношенія K къ L, и изъ отношенія L къ M; слѣдственно и K къ M имѣетъ отношеніе сложенное изъ « отношеній » сторонъ*. И поелику какъ BC къ CG, такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CH*; но какъ BC къ CG, такъ K къ L: то и какъ K къ L, такъ параллелограммъ AC къ *опр. 5. *1.

11,V. параллелограмму CH. Еще же, поелику какъ DC къ CE, такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF; но какъ DC къ CE, такъ L къ M: то и какъ L къ M, такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF. Итакъ, поелику доказано, что какъ K къ L, такъ параллелограммъ AC къ параллелограмму CH; и что какъ L къ M, такъ параллелограммъ CH къ параллелограмму CF: то равномѣстно, какъ K къ M, такъ параллелограммъ AC
22,V. къ параллелограмму CF. Но K къ M имѣетъ отношеніе сложенное изъ «отношеній» сторонъ: чего ради и параллелограммъ AC къ параллелограмму CF имѣетъ отношеніе сложенное изъ «отношеній» сторонъ.

Итакъ равноугольные, и проч. ч. и д. н. (71).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Во всякомъ параллелограммѣ, параллелограммы, кои около поперечника, подобны суть и цѣлому и взаимно.

Пусть будетъ ABCD параллелограммъ, и AC его поперечникъ; и пусть около поперечника AC будутъ параллелограммы EG, HK. Говорю, что каждый изъ параллелограммовъ EG, HK подобенъ цѣлому ABCD, и также подобны суть взаимно.

Поелику къ BC, одной изъ сторонъ треугольника ABC, проведена параллельная EF; то какъ BE къ EA, такъ CF къ FA*. Еще *2.
же, поелику къ CD, одной изъ сторонъ треугольника ACD, проведена параллельная FG; то какъ CF къ FA, такъ DG къ GA. Но какъ CF къ FA, такъ, по доказанному, и BE къ EA; посему какъ BE къ EA, такъ DG къ GA*; а посему совокупленіемъ, какъ *11,V.
BA къ AE такъ DA къ AG*; а премѣненіемъ, *18,V.
какъ BA къ AD, такъ EA къ AG*: Итакъ *16,V.
параллелограммовъ ABCD, EG стороны, кои около общаго угла BAD, суть пропорціональны. И поелику GF параллельна къ DC; то уголъ AGF равенъ углу ADC, а уголъ GFA углу DCA*; и общій двумъ треугольникамъ ADC, *29,I.
AGF есть уголъ DAC: посему треугольникъ ADC есть равноугольный треугольнику AGF. Потому же и треугольникъ ACB есть равноугольный треугольнику AFE: Чего ради и цѣлый параллелограммъ ABCD есть равноугольный параллелограмму EG; и будетъ*: *4.
какъ AD къ DC, такъ AG къ GF; и какъ DC къ CA такъ GF къ FA; и какъ AC къ CB, такъ AF къ FE; и еще, какъ CB къ BA, такъ FE къ EA. И поелику доказано, что какъ DC къ CA, такъ GF къ FA; и какъ AC къ CB, такъ AF къ FE: то равно-

22,V. мѣстно, какъ DC къ BC, такъ GF къ FE. Итакъ параллелограммовъ ABCD, EG стороны, кои около равныхъ угловъ, суть пропорціональныя: И потому параллелограммъ
опр.1. ABCD подобенъ параллелограмму EG. Потому же параллелограммъ ABCD подобенъ и параллелограмму HK. А посему каждый изъ параллелограммовъ EG, HK подобенъ параллелограмму ABCD. Но прямолинейныя фигуры, подобныя тойже прямолинейной фи-
21. гурѣ, суть и взаимно подобны: чего ради и параллелограммъ EG подобенъ параллелограмму HK.

Итакъ во всякомъ, и проч. ч. и д. н. (72).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Составить прямолинейную фигуру, одной данной прямолинейной фигурѣ подобную, и другой данной равную.

Пусть будутъ даны прямолинейныя фигуры: одна, ABC, коей требуется составить подобную, а другая, D, коей равную. Надлежитъ составить фигуру, одной ABC подобную, и другой D равную.

Поставь по прямой BC равный треуголь-
44и45,1. нику ABC параллелограммъ BE*; а по прямой CE равный фигурѣ D параллелограммъ CM,

въ углѣ FCE равномъ углу CBL*: посему *44и45,I
BC есть впрямъ съ CF, а LE съ EM*. Возьми *29и14,I
прямымъ BC, CF среднюю пропорціональную GH*; и напиши изъ GH фигуру KGH *13.
подобную фигурѣ ABC и подобно положенную*. *18.

Поелику какъ BC къ GH, такъ GH къ CF; а естьли три прямыя пропорціональны, то какъ первая къ третьей, такъ прямолинейная фигура изъ первой къ подобной и подобно написанной прямолинейной фигурѣ изъ второй*: посему какъ BC къ CF, такъ *сл.2,20.
треугольникъ ABC къ треугольнику KGH. Но какъ BC къ CF, такъ и параллелограммъ BE къ параллелограмму EF*; посему какъ *1.
треугольникъ ABC къ треугольнику KGH, такъ параллелограммъ BE къ параллелограмму EF*; а посему премѣненіемъ, какъ тре- *11,V.
угольникъ ABC къ параллелограмму BE, такъ треугольникъ KGH къ параллелограмму EF*. *16,V.
Но треугольникъ ABC равенъ параллелограмму BE; посему и треугольникъ KGH равенъ параллелограмму EF. А параллелограммъ EF равенъ фигурѣ D; посему и треугольникъ KGH равенъ фигурѣ D. Онъ же и подобенъ треугольнику ABC.

Итакъ составлена прямолинейная фигура KGH, одной данной прямолинейной фигурѣ

ABC подобная, а другой данной D равная. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

Ежели отъ параллелограмма отнимется параллелограммъ, подобный цѣлому и подобно положенный, имѣющій общій съ нимъ уголъ; то онъ будетъ около тогоже поперечника что и цѣлый.

Пусть отъ параллелограмма ABCD отнятъ будетъ параллелограммъ AEFG, подобный параллелограмму ABCD и подобно положенный, имѣющій общій съ нимъ уголъ DAB. Говорю, что ABCD есть около тогоже поперечника что и AEFG.

Ибо, естьли нѣтъ, то пусть, буде возможно, ихъ поперечникъ будетъ AHC; и проведи чрезъ H, параллельную къ которой ниесть изъ прямыхъ AD, BC, прямую HK.

Поелику параллелограммы ABCD, KG суть около тогоже поперечника; то параллело-
24. грамъ ABCD подобенъ параллелограмму KG;
опр. 1. посему какъ DA къ AB, такъ GA къ AK.
А по подобію параллелограммовъ ABCD, EG, какъ DA къ AB, такъ и GA къ AE; посе-
11, V. му и какъ GA къ AK, такъ GA къ AE.
Итакъ GA къ каждой изъ прямыхъ AK, AE

имѣетъ тоже отношенiе; и потому AE равна AK*, меньшая большей, что невозможно. *9,V.
А посему параллелограммы ABCD, EG не будутъ не около тогоже поперечника: слѣдственно параллелограммъ ABCD есть около тогоже поперечника что и параллелограммъ AEFG.

Итакъ, ежели отъ параллелограмма, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXVII.

Изъ всѣхъ поставляемыхъ по тойже прямой параллелограммовъ, коихъ недостатки суть параллелограммы подобные написанному изъ половины сей прямой и подобно положенные, параллелограммъ поставленный по половинѣ, подобный своему недостатку, есть наибольшiй.

Пусть будетъ AB прямая, и пусть она раздѣлена будетъ по поламъ въ C; и пусть по AB поставленъ будетъ параллелограммъ AD, коего называемый недостакокъ есть параллелограммъ CE подобный и одобно положенный написанному изъ половины прямой AB, то есть изъ CB. Говорю, что изъ всѣхъ поставляемыхъ по AB параллелограммовъ, коихъ недостатки

суть параллелограммы подобные параллелограмму CE и подобно написанные, наибольшій есть AD. Ибо поставь по прямой AB параллелограммъ AF, коего недостатокъ есть параллелограммъ KH подобный параллелограмму CE и подобно положенный: то говорю, что AD больше AF.

Поелику параллелограммъ CE подобенъ параллелограмму KH: то они суть около
26. тогоже поперечника. Проведи ихъ поперечникъ DB; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ CF равенъ па-
43,1. раллелограмму FE, придай обще KH; посему и цѣлый параллелограммъ CH равенъ цѣ-
36,1. лому KE. Но CH равенъ CG, ибо AC равна CB; посему и GC равенъ EK. Придай обще CF; посему цѣлый параллелограммъ AF равенъ наугольнику LMN; и слѣдственно
36,1. параллелограммъ CE, то есть AD, больше параллелограмма AF.

Пусть еще будетъ AB раздѣлена по поламъ въ C; и поставленъ по ней параллелограммъ AL, коего недостатокъ есть CM. Поставь еще по AB параллелограммъ AE, коего недостатокъ есть параллелограммъ DF подобный и подобно положенный параллелограмму CM написанному изъ половины прямой AB. Говорю, что поставленный

по половинѣ прямой AB параллелограммъ AL больше параллелограмма AE.

Поелику параллелограммъ DF подобенъ параллелограмму CM: то они суть около тогоже поперечника*. Пусть будетъ ихъ поперечникъ EB; и допиши фигуру. *26.

Поелику параллелограммъ LF равенъ параллелограмму LH*, ибо FG равна GH; то LF больше KE. Но LF равенъ DL*; посему и DL больше EK. Придай обще KD: чего ради и цѣлый параллелограммъ AL больше цѣлаго AE. *36,1. *43,1.

Итакъ изъ всѣхъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

По данной прямой поставить равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, имѣющій недостатокъ подобный данному параллелограмму. Но данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ поставить параллелограммъ, должна быть не больше параллелограмма поставленнаго по половинѣ той прямой, когда будутъ недостатки подобные, какъ поставленнаго по половинѣ, такъ и того, коему долженъ быть подобенъ недостатокъ.

Пусть будетъ AB данная прямая; и C

данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ по AB поставить параллелограммъ, не большая поставленнаго по половинѣ оной, когда ихъ недостатки подобны; а D параллелограммъ, коему долженъ быть подобенъ недостатокъ. Надлежитъ по данной прямой AB поставить равный данной прямолинейной фигурѣ C параллелограммъ, имѣющій недостатокъ подобный параллелограмму D.

Раздѣли AB по поламъ въ точкѣ E; и изъ EB напиши параллелограммъ EBFG подобный
18. параллелограмму D и подобно положенный; и дополни параллелограммъ AG. Итакъ параллелограммъ AG или равенъ фигурѣ C, или больше оной, по ограниченію. Естьли AG равенъ C, то требуемое сдѣлано; ибо по данной прямой AB поставленъ равный данной прямолинейной фигурѣ C параллелограммъ AG, имѣющій недостатокъ EF подобный параллелограмму D. Естьли же нѣтъ, то HE больше C. Но HE равенъ
36,1. GB; посему и GB больше C. Итакъ составь параллелограммъ KLMN равный избытку параллелограмма GB предъ фигурою C, а параллелограмму D подобный и подобно
25. положенный. Но D подобенъ GB; посему
21. и KM подобенъ GB. Пусть будетъ сторона

KL сходственна съ GE, а LM съ GF. И поелику параллелограммъ GB равенъ C, KM; то GB больше KM; а посему и сторона GE больше стороны LK, и GF больше LM*. Положи прямую GO равную KL, *20.
и прямую GP равную LM; и дополни параллелограммъ OGPQ. Чего ради параллелограммъ GQ равенъ и подобенъ параллелограмму KM*. Но KM подобенъ GB; посему и GQ *24.
подобенъ GB*; а посему GQ и GB суть *21.
около того же поперечника*. Пусть будетъ *26.
ихъ поперечникъ GQB; и допиши фигуру.

Поелику параллелограммъ BG равенъ C, KM; и въ нихъ GQ равенъ KM: то остальной наугольникъ VXY равенъ остальной фигурѣ C. И поелику PR равенъ OS*, придай *43,1.
обще QB; посему и цѣлый PB равенъ цѣлому OB. Но OB равенъ TE*, ибо и сторона AE *36,1.
равна сторонѣ EB; посему и TE равенъ PB. Придай обще OS; посему цѣлый параллелограммъ TS равенъ цѣлому наугольнику VXY. Но наугольникъ VXY равенъ, по доказанному, фигурѣ C: чего ради и параллелограммъ AQ равенъ фигурѣ C.

Итакъ по данной прямой AB поставленъ равный данной прямолинейной фигурѣ C параллелограмъ ST, имѣющій недостатокъ QB подобный параллелограмму D, ибо QB подобенъ GQ. ч. и с. н. (73).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

По данной прямой поставить равный данной прямолинейной фигурѣ параллелограммъ, имѣющій избытокъ подобный данному параллелограмму.

Пусть будетъ AB данная прямая, и C данная прямолинейная фигура, коей равный надлежитъ по AB поставить параллелограммъ; а D параллелограммъ, коему долженъ быть подобенъ избытокъ. Надлежитъ по прямой AB поставить равный прямолинейной фигурѣ C параллелограммъ, имѣющій избытокъ подобный параллелограмму D.

Раздѣли AB по поламъ въ E; и изъ EB напиши параллелограммъ BF подобный
18. параллелограмму D и подобно положенный; и составь параллелограммъ GH равный обѣимъ фигурамъ BF, C, а параллелограмму D
25. подобный и подобно положенный. Посему и
21. GH подобенъ EL. Пусть будетъ сторона KH сходственна съ FL, а KG съ FE. И поелику параллелограммъ GH больше FB; то и сторона KH больше стороны FL, и KG больше FE. Продолжи FL, FE; и пусть будетъ FLM равная KH, а FEN равная KG; и дополни параллелограммъ MN. Чего ради параллелограммъ MN равенъ и подобенъ парал-

лелограмму GH*. Но GH подобенъ EL; по- *24.
сему и MN подобенъ EL*; а посему EL и *21.
MN суть около тогоже поперечника*. Про- *26.
веди ихъ поперечникъ FO; и допиши фигуру.

И поелику параллелограммъ GH равенъ EL, C; но GH равенъ MN: посему и MN равенъ EL, C. Отними обще EL; посему остальной наугольникъ XVZ равенъ фигурѣ C. И поелику AE равна EB; то и параллелограммъ AN равенъ параллелограмму NB*, *36,1.
то есть параллелограмму LP*. Придай *43,1.
обще EO; посему цѣлый параллелограммъ AO равенъ наугольнику XVZ. Но наугольникъ XVZ равенъ фигурѣ C: чего ради и параллелограммъ AO равенъ фигурѣ C.

Итакъ по данной прямой AB поставленъ равный данной прямолинейной фигурѣ C параллелограммъ AO, имѣющій избытокъ QP подобный параллелограмму D, ибо EL подобенъ QP. ч. и с. н. (74).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Данную опредѣленную прямую разсѣчь въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Пусть будетъ AB данная опредѣленная прямая. Надлежитъ прямую AB разсѣчь въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

46,1. Напиши изъ AB квадратъ BC; и поставь
по AC равный квадрату BC параллелограммъ
29. CD, имѣющій избытокъ AD подобный BC.

Поелику BC есть квадратъ; то и AD
есть квадратъ. И поелику квадратъ BC
равенъ параллелограмму CD; отними общій
CE: посему остальной BF равенъ остальному AD. Сіи же параллелограммы и равноугольны; посему и стороны ихъ, кои около равныхъ угловъ, обратно суть пропорціо-
14. нальны: чего ради какъ FE къ ED, такъ
34,1. AE къ EB. Но FE равна AC, то есть AB; а
ED равна AE: посему какъ BA къ AE, такъ
AE къ EB. Но AB больше AE; посему и AE
14.V. больше EB.

Итакъ прямая AB разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи въ точкѣ E; и боль-
опр.3. шій ея отрѣзокъ есть AE. ч. и с. н.

Иначе. Пусть будетъ AB данная прямая. Надлежитъ прямую AB разсѣчь въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Разсѣки AB въ C, такъ чтобы прямоугольникъ въ AB, BC былъ равенъ квадрату
11,II. изъ AC.

Поелику прямоугольникъ въ AB, BC равенъ квадрату изъ CA: то какъ AB къ AC, такъ
17. AC къ CB. Итакъ прямая AB разсѣчена

въ крайнемъ и среднемъ отношенiи въ точкѣ С. ч. и с. н. (75).

ПРЕДЛОЖЕНIЕ XXXI.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ, фигура изъ стороны, противулежащей прямому углу, равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ сторонъ, содержащихъ прямой уголъ.

Пусть будетъ ABC прямоугольный треугольникъ, имѣющiй уголъ BAC прямой. Говорю, что фигура изъ BC равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ BA, AC.

Проведи перпендикулярную AD.

Поелику въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, отъ прямаго угла при A къ основанiю BC проведена перпендикулярная AD: то при перпендикулярной треугольники ABD, ADC подобны суть и цѣлому ABC и взаимно*. И *8.
поелику треугольникъ ABC подобенъ треугольнику ABD: то какъ CB къ BA, такъ AB къ BD. Но естьли три прямыя пропорцiональны; то какъ первая къ третьей такъ фигура изъ первой къ фигурѣ подобной и подобно написанной изъ второй*: по- *сл. 2, 20.
сему какъ CB къ BD, такъ фигура изъ CB

къ фигурѣ подобной и подобно написанной изъ BA. Потому же, какъ BC къ CD, такъ фигура изъ BC къ фигурѣ изъ CA: слѣдственно, и какъ BC къ BD, DC, такъ фигура изъ BC къ фигурамъ подобнымъ и по-
24,V. добно написаннымъ изъ BA, AC. Но прямая BC равна прямымъ BD, DC; чего ради и фигура изъ BC равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ BA, AC.

Итакъ въ прямоугольныхъ, и пр. ч. и д. н.

Иначе. Поелику подобныя фигуры суть въ удвоенномъ отношеніи сходственныхъ
20. сторонъ: то фигура изъ BC къ фигурѣ изъ BA имѣетъ удвоенное отношеніе прямыя CB къ BA. А и квадратъ изъ BC къ квадрату изъ BA имѣетъ удвоенное отношеніе
сл.1,20. прямыя CB къ BA; посему какъ фигура изъ CB къ фигурѣ изъ BA, такъ квадратъ изъ
11,V. CB къ квадрату изъ BA. Потому же, какъ фигура изъ BC къ фигурѣ изъ CA, такъ квадратъ изъ BC къ квадрату изъ CA: слѣдственно и какъ фигура изъ BC къ фигурамъ изъ BA, AC, такъ квадратъ изъ BC
24,V. къ квадратамъ изъ BA, AC. Но квадратъ
47,1. изъ BC равенъ квадратамъ изъ BA, AC: чего ради и фигура изъ BC равна фигурамъ подобнымъ и подобно написаннымъ изъ BA, AC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Ежели два треугольника, имѣющіе двѣ стороны пропорціональныя двумъ сторонамъ, будутъ приставлены взаимно на одномъ углѣ такъ, чтобъ сходственныя ихъ стороны были параллельны; то остальныя стороны сихъ треугольниковъ будутъ впрямъ.

Пусть будутъ два треугольника ABC, DCE, имѣющіе двѣ стороны BA, AC пропорціональныя двумъ сторонамъ CD, DE, то есть, какъ AB къ AC такъ DC къ DE, и сторону AB параллельную къ DC, а AC параллельную къ DE. Говорю, что BC есть впрямъ съ CE.

Поелику AB параллельна къ DC, и на нихъ падаетъ прямая AC; то накосьлежащіе углы BAC, ACD взаимно равны*. Потому же *29, I.
и уголъ CDE равенъ углу ACD: слѣдственно и уголъ BAC равенъ углу CDE. И поелику два треугольника ABC, DCE имѣютъ одинъ уголъ при A равный одному углу при D, и стороны около равныхъ угловъ пропорціональныя, то есть, какъ BA къ AC, такъ CD къ DE: то треугольникъ ABC есть равноугольный треугольнику DCE*; посему уголъ *6.
ABC равенъ углу DCE. А доказано, что и

уголъ ACD равенъ углу BAC: посему цѣлый уголъ ACE равенъ двумъ угламъ ABC, BAC. Придай обще уголъ ACB; посему углы ACE, ACB равны угламъ BAC, ABC, ACB. Но углы
32,1. BAC, ABC, ACB равны двумъ прямымъ; посему и углы ACE, ACB равны двумъ прямымъ. Итакъ при прямой AC, и при точкѣ на ней C, двѣ прямыя BC, CE, нележащія по туже сторону, дѣлаютъ смѣжные углы ACE, ACB равные двумъ прямымъ: чего ради
14,1. BC есть впрямъ съ CE.

Итакъ, ежели два, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Въ равныхъ кругахъ, углы имѣютъ тоже отношеніе что и дуги, на коихъ они стоятъ; при центрахъ ли они будутъ стоять, или при окружностяхъ: « Также и вырѣзки, кои при центрахъ составлены. »

Пусть будутъ ABC, DEF равные круги; и пусть при центрахъ ихъ G, H будутъ углы BGC, EHF, а при окружностяхъ углы BAC, EDF. Говорю, что какъ дуга BC къ дугѣ EF, такъ уголъ BGC къ углу EHF, и такъ уголъ BAC къ углу EDF; « и также вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF. »

Положи по порядку сколько ниесть дугъ

CK, KL равныхъ дугѣ BC; и сколько ниесть дугъ FM, MN равныхъ дугѣ EF; и протяни GK, GL, HM, HN.

Поелику дуги BC, CK, KL взаимно равны; то и углы BGC, CGK, KGL суть взаимно равны*. Посему сколько кратная есть дуга *27,III. BL дуги BC, столько кратный есть и уголъ BGL угла BGC. Потомуже, сколько кратная есть дуга EN дуги EF, столько кратный есть и уголъ EHN угла EHF. И естьли дуга BL равна дугѣ EN, то и уголъ BGL равенъ углу EHN; и естьли дуга BL больше дуги EN, то и уголъ BGL больше угла EHN; и естьли меньше, то меньше. Итакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть, двухъ дугъ BC, EF; и двухъ угловъ BGC, EHF, взяты дуги BC и угла BGC равнократныя, дуга BL и уголъ BGL; а дуги EF и угла EHF равнократныя; дуга EN и уголъ EHN: и доказано, что естьли дуга BL больше дуги EN, то и уголъ BGL большеугла EHN; и естьли равна, то равенъ; и естьли меньше, то меньше: а посему какъ дуга BC къ дугѣ EF, такъ уголъ BGC къ углу EHF*. *оп 5,V.

Но какъ уголъ BGC къ углу EHF, такъ и уголъ BAC къ углу EDF*, ибо каждый *15,V. каждаго есть двукратный*; посему какъ *20,III. дуга BC къ дугѣ EF, такъ и уголъ BGC

къ углу EHF, и такъ уголъ BAC къ
11,V. углу EDF.

Итакъ въ равныхъ кругахъ, углы имѣютъ тоже отношенїе что и дуги, на коихъ они стоятъ; при центрахъ ли они будутъ стоять, или при окружностяхъ. ч. и д. н.

«Говорю такожъ, что какъ дуга BC къ дугѣ EF, такъ вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF.

Протяни BC, CK; и взявъ на дугахъ BC, CK точки O, P, протяни BO, OC, CP, PK.

Поелику двѣ прямыя BG, GC равны двумъ прямымъ CG, GK, и содержатъ равные
4,I. углы: то и основанїе BC равно основанїю CK; и треугольникъ BGC равенъ треугольнику GCK. И поелику дуга BC равна дугѣ CK: то и остальная дуга цѣлаго круга ABC равна остальной дугѣ сего же круга; слѣд-
27,III. ственно и уголъ BOC равенъ углу CPK: чего ради и отрѣзокъ BOC подобенъ от-
*опр.11,III. рѣзку CPK: Они же суть и на равныхъ прямыхъ; а на равныхъ прямыхъ подобные
24,III. отрѣзки круговъ взаимно равны: посему отрѣзокъ BOC равенъ отрѣзку CPK. Но и треугольникъ BGC равенъ треугольнику GCK: чего ради и цѣлой вырѣзокъ GBC равенъ цѣлому вырѣзку GCK. Потому же и вырѣзокъ GKL равенъ каждому изъ вы-

рѣзковъ GKC, GCB: чего ради три вырѣзка GBC, GCK, GKL взаимно равны. Потому же и вырѣзки HEF, HFM, HMN взаимно равны. Посему сколько кратная есть дуга BL дуги BC, столько кратный есть и вырѣзокъ GBL вырѣзка GBC. Потому же сколько кратная есть дуга EN дуги EF, столько кратный есть и вырѣзокъ HEN вырѣзка HEF. И естьли дуга BL равна дугѣ EN, то и вырѣзокъ GBL равенъ вырѣзку HEN; и естьли дуга BL больше дуги EN, то и вырѣзокъ GBL больше вырѣзка HEN; и естьли меньше, то меньше. Итакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть, двухъ дугъ BC, EF, и двухъ вырѣзковъ GBC, HEF, взяты, дуги BC и вырѣзка GBC равнократныя, дуга BL и вырѣзокъ GBL; а дуги EF и вырѣзка HEF равнократныя, дуга EN и вырѣзокъ HEN: и доказано, что естьли дуга BL больше дуги EN, то и вырѣзокъ GBL больше вырѣзка HEN; и естьли равна, то равенъ; и естьли меньше, то меньше: чего ради какъ дуга BC къ дугѣ EF, такъ вырѣзокъ GBC къ вырѣзку HEF.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что какъ вырѣзокъ къ вырѣзку, такъ и уголъ къ углу.» (76).

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГИ X

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Изъ двухъ неравныхъ излагаемыхъ величинъ, ежели отъ большей отнято будетъ больше половины, и отъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ; то останется напослѣдокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше излагаемой меньшей величины.

Пусть будутъ AB, C (таб. 13, ф. 1) двѣ неравныя величины, изъ коихъ AB большая. Говорю, что естьли отъ AB отнято будетъ больше половины, и отъ оставшейся больше половины, и сіе всегда дѣлаемо будетъ; то останется напослѣдокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше величины C.

Ибо величина C будучи взята кратно, будетъ когда либо больше AB. Пусть будетъ взята, и пусть величины C будетъ кратная DE такая, которая больше AB. Раздѣли DE на величины равныя C, а именно, на DF, FG, GE: и отъ AB отними больше половины, какъ BH; и отъ оставшейся AH отними больше половины, какъ HK; и пусть сїе всегда дѣлаемо будетъ, пока раздѣленїя въ AB будутъ равномногїя раздѣленїямъ въ DE. Пусть раздѣленїя AK, KH, HB будутъ равномногїя раздѣленїямъ DF, FG, GE.

Поелику DE больше AB; и отъ DE отнята EG меньше половины, а отъ AB отнята BH больше половины: то остальная GD больше остальной HA. И поелику GD больше HA; и отъ GD отнята GF половина, а отъ HA отнята HK больше половины: то остальная DF больше остальной AK. Но DF равна C; посему и C больше AK; слѣдственно AK меньше C. Итакъ отъ величины AB остается величина AK, которая меньше излагаемой меньшей величины C. ч. и д. н.

Подобно сїе докажется, естьли отнимаемыя будутъ и половины.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА XI.

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Тѣло есть то, что имѣетъ длину, ширину и вышину.

2. Предѣлы же тѣла суть поверхности.

3. Прямая линія называется перпендикулярною или прямою къ плоскости, когда она со всѣми прямыми линіями съ нею встрѣчающимися, и лежащими на той плоскости, дѣлаетъ углы прямые.

4. Плоскость называется перпендикулярною или прямою къ плоскости, когда прямыя линіи, проводимыя на одной изъ сихъ плоскостей, подъ прямыми углами ко взаимному оныхъ сѣченію, будутъ къ другой плоскости подъ прямыми углами.

5. Наклоненіе или уголъ наклоненія прямой линіи къ плоскости есть острой уголъ содержимый сею прямою и другою на той плоскости протянутою, отъ сѣченія поставленной прямой и плоскости, до точки въ которую падаетъ перпендикулярная, отъ внѣшнаго конца поставленной же прямой къ плоскости проведенная. (77).

6. Наклоненіе или уголъ наклоненія двухъ плоскостей есть острой уголъ содержимый прямыми линіями, проводимыми въ каждой плоскости, подъ прямыми углами ко взаимному плоскостей сѣченію, отъ одной онаго точки. (78).

7. Плоскость къ плоскости называется подобно наклоненною, какъ другая къ другой, когда помянутые углы наклоненій ихъ взаимно равны. (79).

8. Параллельныя плоскости суть тѣ, кои нигдѣ взаимно не встрѣчаются.

9. Подобныя толстыя фигуры суть тѣ, кои содержатся равномногими подобными плоскостями. (80).

10. Равныя же и подобныя толстыя фигуры суть тѣ, кои содержатся равномногими плоскостями подобными и равными. (81).

11. Толстый уголъ есть взаимное наклоненіе, больше нежели двухъ линій, взаимно

встрѣчающихся, и ненаходящихся на тойже поверхности. ИНАЧЕ. Толстый уголъ есть тотъ, который содержится больше нежели двумя плоскими углами, кои не лежатъ на тойже плоскости, и составлены при одной точкѣ. (82).

12. Пирамида есть тѣло, содержимое плоскостями, на одной изъ коихъ и при одной « внѣ ея » точкѣ всѣ прочія составляются.

13. Призма есть тѣло, содержимое плоскостями, изъ коихъ противулежащія двѣ суть параллельны, равны и подобны, прочія же суть параллелограммы.

14. Шаръ есть тѣло, производимое чрезъ обращеніе полукружія на неподвижномъ его поперечникѣ, пока оное опять возставится тамъ, откуда началось его обращеніе. (83).

15. Ось же шара есть оная неподвижная прямая, на которой полукружіе обращается.

16. А центръ шара есть тотъ же, что и полукружія.

17. Поперечникъ же шара есть всякая прямая чрезъ центръ проведенная, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ поверхностію шара.

18. Конусъ есть тѣло, производимое чрезъ обращеніе прямоугольнаго треугольника на неподвижной его сторонѣ, одной изъ тѣхъ, кои суть около прямаго угла, пока оный

треугольникъ опять возставится тамъ, откуда началось его обращенїе. И естьли неподвижная прямая равна будетъ остальной сторонѣ, которая при прямомъ углѣ обращается; то конусъ будетъ прямоугольный: естьли же меньше, то тупоугольный: а естьли больше, то остроугольный.

19. Ось же конуса есть оная неподвижная прямая, на которой треугольникъ обращается.

20. А основанїе конуса есть кругъ, обращающеюся прямою написанный.

20. Цилиндръ есть тѣло, производимое чрезъ обращенїе прямоугольнаго параллелограмма на неподвижной его сторонѣ, одной изъ тѣхъ, кои суть около прямаго угла, пока оный параллелограммъ опять возставится тамъ, откуда началось его обращенїе.

22. Ось же цилиндра есть оная неподвижная прямая, на которой параллелограммъ обращается.

23. А основанїя цилиндра суть круги, двумя противулежащими сторонами написанные.

24. Подобные конусы и цилиндры суть тѣ, коихъ и оси и поперечники основанїй суть пропорцїональны.

25. Кубъ есть тѣло, содержимое шестью равными квадратами.

26. Тетраедръ есть тѣло, содержимое четырьмя треугольниками равными и равносторонными.

27. Октаедръ есть тѣло, содержимое восьмью треугольниками равными и равносторонными.

28. Додекаедръ есть тѣло, содержимое двѣнадцатью пятиугольниками равными, равносторонными и равноугольными.

29. Икосаедръ есть тѣло, содержимое двадцатью треугольниками равными и равносторонными.

« 30. Параллелепипедъ есть тѣло, содержимое шестью плоскостями, изъ коихъ каждыя двѣ противулежащія суть параллельны.

31. Надстоящими же называются тѣ стороны его плоскостей, кои суть между основаніемъ и противулежащею плоскостію ». (84).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Прямой линіи одна часть не можетъ быть на подлежащей плоскости, а другая часть на другой плоскости.

Ибо, буде возможно, пусть прямой линіи ABC часть AB будетъ на подлежащей плоскости, а часть BC на другой плоскости.

Итакъ на подлежащей плоскости есть нѣкая прямая линія, лежащая впрямъ съ AB непрерывно. Пусть будетъ оная BD. Чего ради двѣ прямыя ABC, ABD имѣютъ общій отрѣзокъ AB, что невозможно: ибо прямая съ прямою встрѣчается не больше какъ въ одной точкѣ; инако сіи прямыя совмѣстились бы взаимно.

Итакъ прямой линіи, и пр. ч. и д. н. (85).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Ежели двѣ прямыя взаимно пресѣкутся; то онѣ суть на одной плоскости. И всякій треугольникъ весь на одной плоскости.

Пусть двѣ прямыя AB, CD взаимно пресѣкутся въ точкѣ E. Говорю, что AB, CD суть на одной плоскости; и весь треугольникъ на одной плоскости.

Возьми на EC EB, какія ниесть точки F, G; и протяни CB, FG, и проведи FH, GK. Говорю вопервыхъ, что треугольникъ ECB весь на одной плоскости. Ибо естьли треугольника ECB часть FCH, или GBK есть на подлежащей плоскости, а остальная

часть на другой; то будетъ одной изъ прямыхъ EC, EB часть на подлежащей плоскости, а другая часть на другой плоскости: и естьли треугольника ECB часть FCBG будетъ на подлежащей плоскости, а остальная на другой; то будетъ и каждыя изъ прямыхъ EC, EB нѣкая часть на подлежащей плоскости, а остальная на другой плоскости: что нелѣпо, по доказанному
1. нами: посему треугольникъ ECB весь на одной плоскости. А на которой весь треугольникъ ECB, на той и каждая изъ прямыхъ EC, EB; на которой же каждая изъ
1. EC, EB, на той и AB, CD. Итакъ прямыя AB, CD на одной суть плоскости; и весь треугольникъ на одной плоскости. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Ежели двѣ плоскости пресѣкаются; то взаимное оныхъ сѣченіе есть линія прямая.

Пусть двѣ плоскости AB, BC взаимно пресѣкаются; и пусть будетъ DB взаимное
оп.6, 1. оныхъ сѣченіе, которое есть линія. Говорю, что линія DB есть прямая.

Ибо, буде нѣтъ, то протяни отъ D до B на плоскости AB прямую DEB, а на плоскости BC прямую DFB.

Итакъ двѣ прямыя линїи DEB, DFB имѣютъ тѣже концы, и потому заключаютъ пространство; что нелѣпо*. Посему линїи DEB, DFB не суть прямыя. Подобно докажемъ, что ни другая какая линїя, изъ проводимыхъ отъ D къ B, есть прямая, кромѣ линїи DB, взаимнаго сѣченїя плоскостей AB, BC. *акс. 12.

Итакъ, ежели двѣ плоскости, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели прямая къ двумъ прямымъ, пресѣкающимся взаимно, будетъ поставлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченїи; то сїя прямая будетъ подъ прямыми углами и къ плоскости что на тѣхъ прямыхъ.

Пусть пресѣкутся взаимно двѣ прямыя AB, CD въ точкѣ E; и пусть при E будетъ поставлена прямая EF подъ прямыми углами къ каждой изъ прямыхъ AB, CD. Говорю, что EF есть подъ прямыми углами и къ плоскости на AB, CD.

Возьми равныя прямыя AE, EB, CE, ED; и проведи чрезъ E какъ ниесть прямую GEH; и протяни AD, CB; и отъ какой ниесть

точки F на прямой EF, проведи прямыя FA, FG, FD, FC, FH, FB.

Поелику двѣ прямыя AE, ED равны двумъ прямымъ CE, EB, и содержатъ углы
15,I. равные: то и основанїе AD равно основанїю CB, и треугольникъ AED будетъ равенъ треугольнику CEB; слѣдственно и уголъ DAE равенъ углу EBC. Поелику же
15,I. и уголъ AEG равенъ углу BEH; то два треугольника AGE, BEH, имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому, и одну сторону равную одной сторонѣ, кои при равныхъ углахъ, а именно AE равную EB: посему и прочїя стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторо-
26,I. намъ; а посему GE равна EH, а AG равна BH. И поелику AE равна EB, а FE есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами; то основанїе FA равно основанїю
4,I. FB. Потому же и FC равна FD. И поелику AD равна CB, и FA равна FB; то двѣ прямыя FA, AD, равны двумъ прямымъ FB, BC, каждая каждой; доказано же, что и основанїе FD равно основанїю FC:
8,I. посему уголъ FAD равенъ углу FBC. Еще же, поелику доказано, что AG равна BH, а FA равна FB; то двѣ прямыя FA, AG равны двумъ прямымъ FB, BH;

доказано же, что и уголъ FAG равенъ углу FBH: посему основанiе FG равно основанiю FH*. Еще же, поелику GE, по доказанному, равна EH, а EF общая; то двѣ прямыя GE, EF равны двумъ прямымъ HE, EF; но и основанiе FG равно основанiю FH: посему уголъ GEF равенъ углу HEF*; а посему каждый изъ угловъ GEF, HEF есть прямой*. Слѣдственно прямая FE есть подъ прямыми углами къ прямой GH, какъ ниесть чрезъ E проведенной. Подобно докажемъ, что FE подъ прямыми углами и ко всякой прямой проведенной чрезъ E, и находящейся на подлежащей плоскости. Но прямая называется перпендикулярною къ плоскости, когда она со всѣми прямыми линiями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на той плоскости, дѣлаетъ углы прямые*: чего ради прямая FE есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Но подлежащая плоскость есть на AB, CD; посему FE есть подъ прямыми углами къ плоскости на AB, CD.

*4,I.
*8,I.
*оп. 10,I
*опр. 3.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНIЕ V.

Ежели прямая къ тремъ прямымъ, взаимно встрѣчающимся въ одной точкѣ, бу-

детъ поставлена подъ прямыми углами, при общемъ сѣченіи; то всѣ три оныя прямыя будутъ на одной плоскости.

Пусть прямая AB къ тремъ прямымъ BC, BD, BE, взаимно встрѣчающимся въ точкѣ B, будетъ поставлена подъ прямыми углами, при общемъ сѣченіи. Говорю, что всѣ три прямыя BC, BD, BE суть на одной плоскости.

Естьли же нѣтъ, то пусть, буде возможно, будутъ прямыя BD, BE на подлежащей плоскости, а BC на другой; и чрезъ AB, BC проведи плоскость: то взаимное сѣченіе сей плоскости съ подлежащею будетъ
3. прямая линія. Пусть оная будетъ BF.

Итакъ три прямыя AB, BC, BF суть на одной плоскости, то есть на плоскости прямыхъ AB, BC. И поелику AB перпендикулярна къ каждой изъ прямыхъ BD, BE; то AB есть перпендикулярная и къ
4. плоскости прямыхъ BD, BE: Но плоскость прямыхъ BD, BE есть подлежащая; посему AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; слѣдственно AB со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на
опр.3. сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые. Встрѣчается же съ нею прямая BF, лежащая на плоскости прямыхъ BD, BE: посему уголъ ABF

есть прямой. А по положенію, и уголъ ABC прямой; посему уголъ ABF равенъ углу ABC*: Они же и на одной плоскости: что невозможно*. Посему прямая BC не на другой плоскости, на которой суть прямыя BD, BE. Чего ради всѣ три прямыя BC, BD, BE суть на одной плоскости. *акс. 1 *акс. 9.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Ежели двѣ прямыя суть подъ прямыми углами къ тойже плоскости; то оныя прямыя будутъ взаимно параллельныя.

Пусть двѣ прямыя AB, CD будутъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю что AB параллельна къ CD.

Пусть сіи прямыя встрѣчаютъ подлежащую плоскость въ точкахъ B, D. Протяни BD; и на той же подлежащей плоскости проведи, подъ прямыми углами къ BD, прямую DE; и положи AB, DE равныя; и протяни BE, AE, AD.

Поелику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то она со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Встрѣчается же съ AB каждая изъ *опр.

прямыхъ BD, BE, лежащихъ на той плоскости: посему каждый изъ угловъ ABD, ABE есть прямой. Потому же и каждый изъ угловъ CDB, CDE есть прямой. И поелику AB равна DE, а BD общая; то двѣ прямыя AB, BD равны двумъ прямымъ ED, DB; и содержатъ углы прямые: по-
4,1. сему основанїе AD равно основанїю BE. И поелику AB равна DE, и AD равна BE; то двѣ прямыя AB, BE равны двумъ прямымъ ED, DA, и основанїе AE имъ общее: посему уголъ ABE равенъ углу
8,1. EDA. Но уголъ ABE прямой; посему и уголъ EDA есть прямой, и ED перпендикулярна къ DA. Но она перпендикулярна и къ каждой изъ прямыхъ BD, DC: итакъ ED къ тремъ прямымъ BD, DA, DC, при общемъ ихъ сѣченїи, поставлена подъ прямыми углами; а посему всѣ три прямыя
5. BD, DA, DC суть на одной плоскости. Но на которой плоскости DB, DA, на той же есть и AB; ибо всякїй треугольникъ весь
2. на одной плоскости: посему AB, BD, DC суть на одной плоскости. И каждый изъ угловъ ABD, CDB есть прямой: чего
28,1. ради AB, параллельна къ CD.

Итакъ, ежели двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Ежели двѣ прямыя суть параллельныя; и на каждой изъ нихъ взяты какія ниесть точки; то прямая протянутая чрезъ сіи точки будетъ на одной плоскости съ параллельными.

Пусть будутъ двѣ прямыя AB, CD параллельныя; и пусть на каждой изъ нихъ взяты будутъ какія ниесть точк E, F. Говорю, что прямая протянутая чрезъ точки E, F есть на одной плоскости съ параллельными.

Естьли же нѣтъ, то пусть, буде возможно, будетъ она внѣ плоскости ихъ, какъ EGF. Проведи чрезъ EGF плоскость; то взаимное сѣченіе сей плоскости съ плоскостію параллельныхъ будетъ прямая линія*. Пусть будетъ оная EF: слѣдствен- *3.
но двѣ прямыя EGF, EF заключатъ пространство, что невозможно*. Посему пря- *акс.12.
мая протянутая чрезъ E къ F не есть внѣ плоскости, а будетъ слѣдственно на одной плоскости съ параллельными AB, CD.

Итакъ, ежели двѣ прямыя, и пр. ч. и д. н. (86).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Ежели двѣ прямыя суть параллельныя; и одна изъ нихъ будетъ къ плоскости подъ

прямыми углами: то и другая будетъ къ той же плоскости подъ прямыми углами.

Пусть будутъ двѣ прямыя AB, CD параллельныя; и пусть одна изъ нихъ, AB, будетъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю, что и другая CD къ той же плоскости будетъ подъ прямыми углами.

Пусть прямыя AB, CD встрѣчаютъ подлежащую плоскость въ точкахъ B, D. Протяни BD: итакъ AB, CD, BD суть на одной
7. плоскости. На подлежащей плоскости проведи прямую DE подъ прямыми углами къ BD; и положи AB, DE равныя; и протяни BE, AE, AD.

Поелику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то AB ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ
пр.3. на сей плоскости, есть перпендикулярная*: посему каждый изъ угловъ ABD, ABE есть прямой. И поелику на параллельныя прямыя AB, CD падаетъ прямая BD; то углы
29,1. ABD, CDB равны двумъ прямымъ*. Но уголъ ABD прямой; посему и уголъ CDB есть прямой, и CD перпедикулярна къ
п.10,1. BD*. И поелику AB равна DE, а BD общая; то двѣ прямыя AB, BD равны двумъ прямымъ ED, DB; и уголъ ABD равенъ углу

EDB, ибо каждый изъ нихъ прямой: посему основанїе AD равно основанїю BE*. Еще же, *4,1.
поелику AB равна DE, и BE равна AD; то двѣ прямыя AB, BE равны двумъ прямымъ ED, DA, каждая каждой; и основанїе AE имъ общее: посему уголъ ABE равенъ углу EDA*. 8,1.
Но уголъ ABE прямой; посему и уголъ EDA есть прямой, и ED перпендикулярна къ AD*. Но она перпендикулярна и къ *оп.10,1.
DB: итакъ ED и къ плоскости на BD, DA есть перпендикулярная*: а посему ED со *4.
всѣми прямыми линїями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые. На плоскости же прямыхъ BA, AD лежитъ прямая DC; ибо прямыя AB, BD суть на плоскости прямыхъ BD, DA*, а DC есть на той же плоскости, что *2.
и AB, BD*: посему ED есть подъ прямыми *7.
углами къ DC; а посему и CD есть подъ прямыми углами къ DE. Но CD подъ прямыми углами и къ BD: итакъ CD къ двумъ прямымъ DE, DB пресѣкающимся, при взаимномъ ихъ сѣченїи D, поставлена подъ прямыми углами; посему CD и къ плоскости на DE, DB есть подъ прямыми углами*. Но пло- *4.
скость на DE, DB есть подлежащая: чего ради CD есть подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Прямыя, параллельныя къ тойже прямой, хотя и не всѣ на одной плоскости, суть и взаимно параллельныя.

Пусть будетъ каждая изъ прямыхъ AB, CD параллельна къ прямой EF; и пусть AB, CD не будутъ на одной плоскости съ EF. Говорю, что AB параллельна къ CD.

Возьми на EF какую ниесть точку G; и отъ сей точки проведи, на плоскости прямыхъ EF, AB, подъ прямыми углами къ
11,1. EF, прямую GH; и еще на плоскости прямыхъ FE, CD, подъ прямыми углами къ EF, прямую GK.

Поелику EF къ каждой изъ прямыхъ GH, GK есть подъ прямыми углами; то EF и къ плоскости на GH, GK есть подъ пря-
4. мыми углами. Но EF параллельна къ AB; посему и AB къ плоскости на H, G, K,
8. есть подъ прямыми углами. Потому же и CD къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами. Итакъ каждая изъ прямыхъ AB, CD къ плоскости на H, G, K, есть подъ прямыми углами. Но ежели двѣ прямыя будутъ къ тойже плоскости подъ прямыми углами; то оныя двѣ прямыя суть взаимно
6. параллельныя: чего ради AB параллельна къ CD. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Ежели двѣ прямыя, взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ, взаимно встрѣчающимся, но лежащимъ не на тойже плоскости: то сіи прямыя будутъ содержать углы равные.

Пусть двѣ прямыя AB, BC взаимно встрѣчающіяся, будутъ параллельны къ другимъ двумъ DE, EF взаимно встрѣчающимся, но лежащимъ не на тойже плоскости. Говорю, что уголъ ABC равенъ углу DEF.

Отними прямыя BA, BC, ED, EF взаимно равныя; и протяни AD, CF, BE, AC, DF.

Поелику BA равна ED, и параллельна къ ней; то и AD равна BE, и параллельна къ ней*. Потому же и CF равна BE, и параллельна *38,I.
къ ней. Итакъ каждая изъ прямыхъ AD, CF равна BE, и параллельна къ ней; а прямыя параллельныя къ тойже прямой, суть и взаимно параллельныя*: посему прямыя AD, CF суть *9.
параллельныя; и такъ же равныя. Соединяютъ же концы ихъ прямыя AC, DF: посему и AC, DF суть равныя и параллельныя. Итакъ, поелику двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF; и основаніе AC равно основанію DF: посему уголъ ABC равенъ углу DEF*. *8,I.

Итакъ, ежели двѣ прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Къ данной подлежащей плоскости, отъ данной внѣ ея точки, провести перпендикулярную прямую линїю.

Пусть будетъ A данная точка внѣ данной подлежащей плоскости. Надлежитъ отъ точки A провести перпендикулярную прямую линїю къ сей плоскости.

Проведи на подлежащей плоскости какъ ниесть прямую BC; и отъ A проведи, пер-
12,I. пендикулярную къ BC, прямую AD.

Естьли прямая AD будетъ также перпендикулярна и къ подлежащей плоскости; то предложенное сдѣлано. Естьли же нѣтъ: то отъ точки D проведи на подлежащей плоскости, перпендикулярную къ BC, прямую
11,I. DE; и отъ A проведи, перпендикулярную
12,I. къ DE, прямую AF; и чрезъ F проведи, па-
31,I. раллельную къ BC, прямую GH.

Поелику BC къ каждой изъ прямыхъ DA, DE подъ прямыми углами; то BC будетъ и къ плоскости на ED, DA подъ прямыми
4. углами. Она же и параллельна къ GH. Но ежели двѣ прямыя параллельны, и ежели одна изъ нихъ къ нѣкоей плоскости подъ прямыми углами; то и другая къ той же
8. плоскости подъ прямыми углами: посему

и GH къ плоскости на ED, DA есть подъ прямыми углами; и слѣдовательно ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, GH есть перпендикулярная*. Встрѣчается же съ GH прямая AF лежащая на плоскости прямыхъ ED, DA: посему GH перпендикулярна къ FA; слѣдственно и FA перпендикулярна къ GH. Но AF перпендикулярна къ DE, по строенію; посему AF къ каждой изъ прямыхъ GH, DE перпендикулярна. Но ежели прямая къ двумъ прямымъ, пересѣкающимся взаимно, будетъ поставлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подъ прямыми углами и къ плоскости что на тѣхъ прямыхъ*: посему FA есть подъ прямыми углами къ плоскости на ED, GH. Но плоскость на ED, GH есть подлежащая: чего ради AF къ подлежащей плоскости есть подъ прямыми углами.

*опр. 3.

*4.

Итакъ къ данной плоскости, отъ данной точки A внѣ ея, проведена перпендикулярная прямая линія AF. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Къ данной плоскости, отъ данной на ней точки, возставить подъ прямыми углами прямую линію.

Пусть будетъ дана подлежащая плоскость; и пусть будетъ A данная на ней точка. Надлежитъ отъ точки A возставить, подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости, прямую линїю.

Отъ какой ниесть точки B, взятой внѣ подлежащей плоскости, проведи перпенди-
11. кулярную къ ней прямую BC; и чрезъ точку A
31,1. проведи, параллельную къ BC, прямую AD.

Поелику двѣ прямыя AD, CB параллельны; и одна изъ нихъ, BC, есть къ подлежащей плоскости подъ прямыми углами: то и другая AD къ сей же плоскости есть подъ
8. прямымы углами.

Итакъ, къ данной плоскости, отъ данной на ней точки, возставлена подъ прямыми углами прямая линїя. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Отъ тойже точки данной плоскости, не могутъ быть возставлены, по туже ея сторону, двѣ прямыя подъ прямыми къ ней углами.

Ибо, буде возможно, пусть отъ тойже точки A данной плоскости, будутъ возставлены, по туже ея сторону, двѣ прямыя AB, AC подъ прямыми къ ней углами.

Проведи чрезъ BA, AC плоскость: то взаимное сѣченіе сей плоскости съ данною будетъ прямая линія*, проходящая чрезъ A. *3.
Пусть оная будетъ DAE.

Итакъ прямыя AB, AC, DAE суть на одной плоскости. И поелику CA подъ прямыми углами къ данной плоскости; то она со всѣми прямыми линіями, съ нею встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Встрѣчается же съ EA прямая DAE, лежащая на данной плоскости: посему уголъ CAE есть прямой. Потому же и уголъ BAE есть прямой. Чего ради уголъ CAE равенъ углу BAE; и они суть на одной плоскости: что невозможно. *опр. 3.

Итакъ отъ тойже, и проч. ч. и д. н. (87).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Плоскости, къ коимъ таже прямая есть перпендикулярная, суть взаимно параллельныя.

Пусть прямая AB будетъ къ каждой изъ плоскостей CD, EF перпендикулярная. Говорю, что сіи плоскости суть взаимно параллельныя.

Ибо, естьли нѣтъ; то онѣ, будучи

продолжены взаимно встрѣтятся. Пусть встрѣтятся; то взаимное ихъ сѣченіе будетъ прямая линія. Пусть оная будетъ GH. Возьми на GH какую ниесть точку K; и протяни AK, BK.

Поелику AB перпендикулярна къ плоскости EF; то и къ прямой BK, лежащей на продолженіи плоскости EF, есть AB пер-
опр. 3. пендикулярная: посему уголъ ABK есть прямой. Потому же и уголъ BAK есть прямой. Посему треугольника ABK два угла ABK, BAK равны двумъ прямымъ; что невоз-
17, 1. можно. Слѣдственно плоскости CD, EF, будучи продолжены, не встрѣтятся: чего ради плоскости CD, EF суть взаимно па-
опр. 8. раллельныя.

Итакъ плоскости, къ коимъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Ежели двѣ прямыя, взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ прямымъ взаимно встрѣчающимся, и лежащимъ не на тойже плоскости; то и плоскости на оныхъ будутъ взаимно параллельны.

Пусть двѣ прямыя AB, CD взаимно встрѣ-

чающіяся, будутъ параллельны къ другимъ двумъ прямымъ DE, EF взаимно встрѣчающимся, и лежащимъ не на тойже плоскости. Говорю, что плоскости на AB, BC, и на DE, EF, будучи и продолжены не встрѣтятся взаимно.

Проведи отъ точки B, къ плоскости прямыхъ DE, EF перпендикулярную, прямую BG*, которая пусть встрѣтитъ сію плоскость въ точкѣ G; и проведи чрезъ G, параллельную къ ED прямую GH*, и параллельную къ EF прямую GK. *11. *31,1.

Поелику BG перпендикулярна къ плоскости прямыхъ DE, EF; то она со всѣми прямыми, съ нею встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости, дѣлаетъ углы прямые*. Встрѣчается же съ BG каждая изъ прямыхъ GH, GK, кои лежатъ на плоскости прямыхъ DE, EF: посему каждый изъ угловъ BGH, BGK есть прямой. И поелику BA параллельна къ GH*; то углы GBA, BGH равны двумъ прямымъ*. Но уголъ BGH прямой: посему и уголъ GBA прямой; и BG есть подъ прямыми углами къ BA. Потому же BG подъ прямыми углами и къ BC. Итакъ, поелику прямая BG къ двумъ прямымъ BA, BC, взаимно пресѣкающимся, поставлена подъ прямыми углами; то BG *опр. 3. *9. *29,1.

будетъ и къ плоскости прямыхъ BA, BC
4. подъ прямыми углами. Потому же BG есть и къ плоскости прямыхъ GH, GK подъ прямыми углами. Но плоскость прямыхъ GH, GK есть та же, что и плоскость прямыхъ DE, EF: посему BG къ плоскости прямыхъ DE, EF есть подъ прямыми углами. А доказано, что прямая GB есть подъ прямыми углами къ плоскости прямыхъ AB, BC; еще же сія прямая къ плоскости прямыхъ DE, EF перпендикулярна: посему BG къ каждой изъ плоскостей, что на AB, BC, и на DE, EF, есть перпендикулярная. А плоскости, къ коимъ таже прямая есть
14. перпендикулярная, суть взаимно параллельныя: чего ради плоскость на AB, BC параллельна къ плоскости на DE, EF.

Итакъ, ежели двѣ, и пр. ч. и д. н. (88).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Ежели двѣ параллельныя плоскости пересѣчены какою ниесть плоскостію; то взаимныя ихъ сѣченія суть параллельны.

Пусть двѣ параллельныя плоскости AB, CD будутъ пересѣчены какою ниесть плоскостію EFHG: и пусть взаимныя ихъ сѣченія будутъ EF, GH. Говорю, что EF параллельна къ GH.

Ибо, буде не такъ: то прямыя EF, GH продолженныя встрѣтятся, или по ту сторону гдѣ F, H, или по ту сторону гдѣ E, G. Продолжи оныя, и пусть встрѣтятся по ту сторону, вопервыхъ, гдѣ F, H, въ точкѣ K.

Поелику прямая EFK есть на плоскости AB; то всякая точка на прямой EFK есть на плоскости AB*: но одна изъ точекъ на прямой EFK есть K; посему точка K есть на плоскости AB. Потому же точка K есть и на плоскости CD. Итакъ плоскости AB, CD, продолженныя взаимно встрѣтятся. Но онѣ не встрѣчаются, ибо, по положенію, суть параллельныя: посему и прямыя EF, GH продолженныя не встрѣтятся по ту сторону гдѣ F, H. Подобно докажемъ, что прямыя EF, GH не встрѣтятся ни по ту сторону гдѣ E, G. А ни по которую сторону невстрѣчающіяся прямыя суть параллельныя*: чего ради EF, параллельна къ GH. *1. *оп. 35, I.

Итакъ, ежели двѣ параллельныя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Ежели двѣ прямыя пересѣчены будутъ параллельными плоскостями; то онѣ разсѣкутся въ томъже отношеніи.

Пусть двѣ прямыя AB, CD будутъ пересѣчены параллельными плоскостями GH, KL, MN въ точкахъ A, E, B, C, F, D. Говорю, что какъ AE къ EB, такъ CF къ FD.

Протяни AC, BD, AD; и пусть AD встрѣтится съ плоскостїю KL въ точкѣ O; и протяни EO, OF.

Поелику двѣ параллельныя плоскости KL, MN пересѣчены плоскостїю EBDO; то взаимныя ихъ сѣченїя EO, BD суть параллель-
16. ныя. Такъ же, поелику двѣ параллельныя плоскости GH, KL пересѣчены плоскостїю AOFC; то взаимныя ихъ сѣченїя AC, OF суть параллельныя. Итакъ, поелику къ BA, одной изъ сторонъ треугольника ABD, проведена параллельная EO; то какъ AE къ EB,
2,VI. такъ AO къ OD. Еще же, поелику къ AC, одной изъ сторонъ треугольника ADC, проведена параллельная OF; то какъ AO къ OD, такъ CF къ FD. А доказано, что какъ AO къ OD, такъ AE къ EB: чего ради какъ AE
11,V. къ EB, такъ CF къ FD.

Итакъ, ежели двѣ, и проч. ч. и д. н. (89).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Ежели прямая будетъ подъ прямыми углами къ какой ниесть плоскости; то всякія

плоскости, проходящія чрезъ сію прямую, будутъ къ той же плоскости подъ прямыми углами.

Пусть прямая AB будетъ подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости. Говорю что всякія плоскости, проходящія чрезъ AB, суть къ той же подлежащей плоскости подъ прямыми углами.

Пусть чрезъ AB пройдетъ плоскость DE; и пусть будетъ CE взаимное сѣченіе плоскости DE съ подлежащею. На прямой CE возьми какую ниесть точку F; и отъ точки F проведи на плоскости DE, подъ прямыми углами къ CE, прямую FG*. *11,I.

Поелику AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то AB ко всѣмъ прямымъ, съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости, есть перпендикулярная*: слѣдственно AB перпендикулярна къ прямой CE; а посему уголъ ABF есть прямой*. Но и уголъ GFB прямой же; посему AB параллельна къ FG*. Но AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; посему и FG перпендикулярна къ сей плоскости*. Но плоскость называется перпендикулярною къ плоскости, когда прямыя линіи, проводимыя на одной изъ сихъ плоскостей, подъ прямыми углами ко взаимному оныхъ сѣченію, суть

*опр. 3.
*оп. 10, I.
*28, I.
*8.

къ другой плоскости подъ прямыми угла-
опр.4. ми; доказано же, что прямая FG проведенная на плоскости DE, подъ прямыми углами къ CE, взаимному сѣченїю плоскостей, есть подъ прямыми углами и къ подлежащей плоскости: слѣдственно плоскость DE есть периендикулярная къ подлежащей плоскости. Подобно докажется, что всякїя плоскости, проходящїя чрезъ прямую AB, перпендикулярны къ подлежащей плоскости.

Итакъ, ежели прямая, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIX.

Ежели двѣ плоскости, взаимно пресѣкающїяся, перпендикулярны къ какой ниесть плоскости; то и взаимное оныхъ сѣченїе будетъ къ той же плоскости перпендикулярное.

Пусть двѣ плоскости AB, BC, взаимно пресѣкающїяся, будутъ перпендикулярны къ подлежащей плоскости; и пусть взаимное оныхъ сѣченїе будетъ прямая BD. Говорю, что BD есть перпендикулярная къ той же плоскости.

Буде же нѣтъ: то отъ точки D проведи на плоскости AB, подъ прямыми
11,I. углами къ AD, прямую DE; и отъ точки же

D проведи на плоскости BC, подъ прямыми углами къ CD, прямую DF.

Поелику плоскость AB перпендикулярна къ подлежащей плоскости; и прямая DE проведена на плоскости AB, подъ прямыми углами къ AD, взаимному сѣченію сихъ плоскостей: то DE есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости*. Подобно докажемъ, что и DF есть перпендикулярная къ подлежащей плоскости. Итакъ отъ тойже точки D подлежащей плоскости, возставлены, по туже ея сторону, двѣ прямыя подъ прямыми къ ней углами; что невозможно*. Посему отъ точки D не могутъ быть возставлены, подъ прямыми углами къ подлежащей плоскости, иныя прямыя, кромѣ прямой DB, взаимнаго сѣченія плоскостей AB, BC.

*опр. 4.

*13.

Итакъ, ежели двѣ плоскости, и проч. ч. и д. н. (90).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XX.

Ежели толстый уголъ будетъ содержимъ тремя плоскими углами; то два изъ сихъ плоскихъ угловъ, всячески перебранные, суть больше остальнаго.

Пусть толстый уголъ при A будетъ содержимъ тремя плоскими углами BAC, CAD,

DAB. Говорю, что изъ угловъ BAC, CAD, DAB, два, всячески перебранные, суть больше остальнаго

Ибо, естьли углы BAC, CAD, DAB всѣ взаимно равны; то явно, что два изъ сихъ угловъ, всячески перебранные, больше остальнаго. Естьли же нѣтъ, то пусть уголъ BAC будетъ большій. При прямой AB, и при точкѣ на ней A, составь на плоскости BAC уголъ BAE равный углу DAB; и положи AD, AE равныя; и проведи чрезъ E прямую BEC пересѣкающую прямыя AB, AC въ точкахъ B, C; и протяни DB, DC.

Поелику DA равна AE, и AB общая; то двѣ прямыя DA, AB равны двумъ прямымъ AE, AB; и уголъ DAB равенъ углу BAE:
4,1. посему основаніе DB равно основанію BE.
И поелику двѣ прямыя DB, DC больше
20,1. прямой BC; а DB равна BE: то остальная DC больше остальной EC. Итакъ, поелику DA равна AE, а AC общая; основаніе же DC больше основанія EC: то уголъ DAC
25,1. больше угла EAC. Но уголъ DAB равенъ углу BAE, по строенію: чего ради углы DAB, DAC больше угла BAC. Взявъ другіе каке ниесть два угла, подобно докажемъ, что они больше остальнаго.

Итакъ, ежели толстый уголъ, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXI.

Плоскіе углы, содержащіе всякій толстый уголъ, суть меньше четырехъ угловъ прямыхъ.

Пусть толстый уголъ при A будетъ содержимъ плоскими углами BAC, CAD, DAB. Говорю, что углы BAC, CAD, DAB суть меньше четырехъ прямыхъ.

На каждой изъ прямыхъ AB, AC, AD возьми какія ниесть точки B, C, D; и протяни BC, CD, DB.

Поелику толстый уголъ при B содержимъ тремя плоскими углами CBA, ABD, CBD; то всякіе два изъ нихъ больше остальнаго*: *20. посему углы CBA, ABD больше угла CBD. Потому же и углы BCA, ACD больше угла BCD; и углы CDA, ADB больше угла CDB. Слѣдственно шесть угловъ CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB суть больше трехъ угловъ CBD, BCD, CDB. Но три угла CBD, BCD, CDB равны двумъ прямымъ*; посему *32,1. шесть угловъ CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB больше двухъ прямыхъ. И поелику каждаго изъ треугольниковъ ABC, ACD, ADB три угла равны двумъ прямымъ; то трехъ сихъ треугольниковъ девять угловъ CBA, ACB, BAC, ACD, DAC, CDA, ADB, DBA, BAD

равны шести прямымъ. Но въ нихъ шесть угловъ ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA больше двухъ прямыхъ: чего ради остальные три угла BAC, CAD, DAB, содержащіе толстый уголъ, суть меньше четырехъ прямыхъ.

Итакъ, плоскіе углы, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXII.

Ежели будутъ три плоскіе угла, изъ коихъ два, всячески перебранные, больше остальнаго; содержать же ихъ будутъ прямыя всѣ взаимно равныя: то изъ прямыхъ, сопрягающихъ въ нихъ равныя прямыя, возможно будетъ составить треугольникъ.

Пусть будутъ три плоскіе угла ABC, DEF, GHK, изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше остальнаго; а именно, углы ABC, DEF больше угла GHK, углы же DEF, GHK больше угла ABC, и еще, углы GHK, ABC больше угла DEF; и пусть прямыя AB, BC, DE, EF, GH, HK будутъ всѣ взаимно равныя; и пусть протянуты будутъ AC, DF, GK. Говорю, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK, возможно составить треугольникъ; то есть, что изъ прямыхъ AC, DF, GK, всякія двѣ суть больше остальной.

Естьли углы ABC, DEF, GHK взаимно равны: то, поелику и AC, DF, GK будутъ взаимно равны, явно, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK, возможно составить треугольникъ. Естьли же неравны: то при прямой HK, и при точкѣ на ней H, составь уголъ KHL равный углу ABC*; и положи HL равную которой ниесть изъ прямыхъ AB, BC, DE, EF, GH, HK; и протяни KL, GL. *23,I.

Поелику двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ KH, HL; и уголъ при B равенъ углу KHL: посему основанїе AC равно основанїю KL*. И поелику углы ABC, GHK больше угла DEF; а уголъ ABC равенъ углу KHL: посему и уголъ GHL больше угла DEF. Итакъ, поелику двѣ прямыя GH, HL равны двумъ прямымъ DE, EF; но уголъ GHL больше угла при E: посему и основанїе GL больше основанїя DF*. Но GK, KL больше GL; посему GK, KL и гораздо больше DF. А KL равна AC; посему AC, GK больше остальной DF. Подобно докажемъ, что и AC, DF больше GK; и еще DF, GK больше AC. Итакъ возможно изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK, составить треугольникъ*. *4,I. *24,I. *22,I.

Иначе. Пусть будутъ даны три плоскїе

угла ABC, DEF, GHK, изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше остальнаго; и пусть содержатъ ихъ равныя прямыя AB, BC, DE, EF, GH, HK; и пусть протянуты будутъ AC, DF, GK. Говорю, что изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK, возможно составить треугольникъ; то есть, что двѣ изъ сихъ прямыхъ, всячески перебранныя, суть больше остальной.

Естьли углы при точкахъ B, E, H суть взаимно равные: то и прямыя AC, DF, GK
4,1. будутъ взаимно равныя; и двѣ изъ нихъ будутъ больше остальной. Естьли же нѣтъ, то пусть углы при точкахъ B, E, H будутъ неравны, и пусть уголъ при B будетъ больше каждаго изъ угловъ E, H: посему прямая AC будетъ больше каждой изъ пря-
24,1. мыхъ DF, GK; и явно, что AC съ каждою изъ прямыхъ DF, GK больше остальной. Говорю также, что и DF, GK больше AC. При прямой AB, и при точкѣ на ней B, составь уголъ ABL равный углу GHK; и положи BL равную которой ниесть изъ прямыхъ AB, BC, DE, EF, GH, HK; и протяни AL, LC.

Поелику двѣ прямыя AB, BL равны двумъ прямымъ GH, HK, каждая каждой; и содержатъ углы равные: то основаніе AL

равно основанію GK*. И поелику углы при точкахъ E, H больше угла ABC; а уголъ GHK равенъ углу ABL: посему и остальной уголъ при E больше угла LBC. Итакъ, поелику двѣ прямыя LB, BC равны двумъ прямымъ DE, EF, каждая каждой; но уголъ DEF больше угла LBC: посему и основаніе DF больше основанія LC*. Доказано же, что GK равна AL; посему DF, GK суть больше AL, LC. Но AL, LC больше AC*: посему DF, GK и гораздо больше AC. Чего ради двѣ изъ прямыхъ AC, DF, GK, всячески перебранныя, суть больше остальной. Итакъ изъ прямыхъ, равныхъ прямымъ AC, DF, GK, возможно составить треугольникъ*. ч. и д. н.

*4,I. *24,I. *20,I. *22,I.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIII.

Изъ трехъ плоскихъ угловъ составить толстый уголъ. Но надлежитъ двумъ изъ сихъ данныхъ трехъ угловъ, всячески перебраннымъ, быть больше остальнаго; и всѣмъ тремъ быть меньше четырехъ угловъ прямыхъ.

Пусть будутъ три данные плоскіе углы ABC, DEF, GHK; изъ коихъ два, всячески перебранные, пусть будутъ больше осталь-

наго; и пусть всѣ три будутъ меньше четырехъ прямыхъ. Надлежитъ изъ угловъ, равныхъ угламъ ABC, DEF, GHK, составить толстый уголъ.

Отними равныя прямыя AB, BC, DE, EF, GH, HK; и протяни AC, DF, GK. Почему изъ прямыхъ равныхъ прямымъ AC, DF, GK
22. возможно составить треугольникъ. Со-
22,I. ставь треугольникъ LMN*, такъ чтобы была LM равная AC, а MN равная DF, и LN равная GK; и около треугольника
5,IV. LMN опиши кругъ LMN: и возьми онаго
1,III. центръ, который будетъ или внутрь треугольника LMN, или на его сторонѣ, или внѣ онаго.

Пусть будетъ вопервыхъ внутрь, и пусть будетъ оный въ O: протяни LO, MO, NO. Говорю, что AB больше LO. Ибо, буде нѣтъ; то AB или равна LO, или меньше ея. Пусть будетъ, вопервыхъ, равна. Поелику AB равна LO, а и AB равна BC; то LO равна BC: но LO равна и OM: итакъ двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ LO, OM, каждая каждой; и основаніе AC равно, по положенію, основанію
8,I. LM: посему уголъ ABC равенъ углу LOM. Потому же уголъ DEF равенъ углу MON, и уголъ GHK углу NOL. Чего ради три угла ABC, DEF, GHK равны тремъ угламъ

LOM, MON, NOL. Но три угла LOM, MON, NOL равны четыремъ прямымъ: посему и три угла ABC, DEF, GHK равны четыремъ прямымъ; они же по положенію, и меньше четырехъ прямыхъ: что нелѣпо. Слѣдственно AB не равна LO. Говорю еще, что AB и не меньше LO. Ибо, буде возможно, пусть будетъ меньше; и положи OP равную AB, и OQ равную BC; и протяни PQ. Поелику AB равна BC, то и OP равна OQ; посему и остальная LP равна остальной QM: а посему LM параллельна къ PQ*; и треугольникъ *2.VI.
LMO есть равноугольный треугольнику PQO. Чего ради какъ OL къ LM, такъ OP къ PQ*; *4,VI.
и премѣненіемъ, какъ LO къ OP, такъ LM къ PQ*. Но LO больше OP; посему LM *16,V.
больше PQ: а LM равна AC, по строенію; посему и AC больше PQ. Итакъ, поелику двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ PO, OQ; но основаніе AC больше основанія PQ: то и уголъ ABC больше угла POQ*. *25,I.
Подобно докажемъ, что уголъ DEF больше угла MON, и уголъ GHK больше угла NOL. Чего ради три угла ABC, DEF, GHK суть больше трехъ угловъ LOM, MON, NOL. Но углы ABC, DEF, GHK, по положенію, меньше четырехъ прямыхъ; посему углы LOM, MON, NOL и гораздо меньше

четырехъ прямыхъ; они же равны четыремъ прямымъ: что нелѣпо. Слѣдственно AB не меньше LO. А доказано, что и ни равна ей: итакъ AB больше LO.

Отъ точки O возставь, подъ прямыми
12. углами къ плоскости круга LMN, прямую OR. Пусть будетъ избытокъ квадрата изъ AB предъ квадратомъ изъ LO равенъ квадрату
лемма. изъ OR; и протяни RL, RM, RN. Поелику прямая OR перпендикулярна къ плоскости круга LMN; то RO перпендикулярна и къ
опр. 3. каждой изъ прямыхъ LO, MO, NO. И поелику LO равна OM, а OR есть общая, и подъ прямыми къ нимъ углами: то основаніе RL равно основанію RM*. Потому же
*4, 1. и RN равна каждой изъ прямыхъ RL, RM. Итакъ три прямыя RL, RM, RN суть взаимно равны. И поелику квадратъ изъ OR равенъ, по положенію, избытку квадрата изъ AB предъ квадратомъ изъ LO; то квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ LO, OR. Квадратамъ же изъ LO, OR равенъ и
47, 1. квадратъ изъ LR, ибо уголъ LOR есть прямой: посему квадратъ изъ AB равенъ квадрату изъ RL; слѣдственно AB равна RL. Но прямой AB равна каждая изъ прямыхъ BC, DE, EF, GH, HK; а прямой RL равна каждая изъ прямыхъ RM, RN: посему каждая

изъ прямыхъ AB, BC, DE, EF, GH, HK равна каждой изъ прямыхъ RL, RM, RN. А поелику двѣ прямыя LR, RM равны двумъ прямымъ AB, BC; и основанїе LM равно, по положенїю, основанїю AC: посему уголъ LRM равенъ углу ABC*. Потому же, уголъ *8,I.
MRN равенъ углу DEF, а уголъ LRN углу GHK. Итакъ изъ трехъ плоскихъ угловъ LRM, MRN, LRN, равныхъ тремъ даннымъ угламъ ABC, DEF, GHK, составленъ уголъ толстый при R, содержимый углами LRM, MRN, LRN.

Но пусть центръ круга будетъ на одной изъ сторонъ треугольника, а именно, на MN, и пусть будетъ оный въ O: протяни OL. Говорю еще, что AB больше LO. Ибо, буде нѣтъ; то AB или равна LO, или меньше ея. Пусть будетъ, вопервыхъ, равна. Посему двѣ прямыя AB, BC, то есть DE, EF равны двумъ прямымъ MO, OL, то есть прямой MN. Но MN равна, по положенїю, DF: посему DE, EF равны DF; что невозможно*: слѣдственно AB не равна LO. По- *20,I.
добно докажемъ, что и не меньше ея; ибо выдетъ еще большая нелѣпость: итакъ AB больше LO. Естьли же еще возставимъ, подъ прямыми углами къ плоскости круга, прямую RO равную прямой, коея

квадратъ равенъ избытку квадрата изъ AB
лемма. предъ квадратомъ изъ LO: то задача будетъ рѣшена.

Пусть центръ круга будетъ еще внѣ треугольника LMN, и пусть будетъ оный въ O: протяни LO, MO, NO. Говорю еще, что AB больше LO. Ибо, буде нѣтъ; то или равна, или меньше. Пусть будетъ, вопервыхъ, равна. Итакъ двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ MO, OL, каждая каждой; и основанїе AC равно основанїю ML:
8,1. посему уголъ ABC равенъ углу MOL. Потому же уголъ GHK равенъ углу LON. Чего ради цѣлый уголъ MON равенъ двумъ угламъ ABC, GHK. Но углы ABC, GHK больше угла DEF посему и уголъ MON больше угла DEF. И поелику двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ MO, ON, и основанїе DF равно основанїю MN: то уголъ MON равенъ углу DEF; доказано же, что онъ больше; что нелѣпо: Чего ради AB не равна LO: послѣже мы докажемъ, что и не меньше: слѣдственно больше. Естьли возставимъ опять, подъ прямыми углами къ плоскости круга, прямую OR; и естьли возьмемъ сїю прямую равную прямой, коея квадратъ равенъ избытку квадрата изъ AB предъ квадратомъ
лемма. изъ LO: то задача будетъ рѣшена.

Теперь говорю, что AB не меньше LO. Ибо, буде возможно, пусть будетъ меньше: положи прямую OP равную AB, и прямую OQ равную BC; и протяни PQ. Поелику AB равна BC, то OP равна OQ; посему и остальная PL равна остальной QM: а посему LM параллельна къ QP*; и треуголь- *2,VI.
никъ LMO есть равноугольный треугольнику QOP. Чего ради какъ OL къ LM, такъ OP къ PQ*; и премѣненіемъ, какъ LO къ *4,VI.
OP, такъ LM къ PQ*. Но LO больше OP, по- *16,V.
сему LM больше PQ: а LM равна AC; посему и AC больше PQ. И поелику двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ PO, OQ, каждая каждой; но основаніе AC больше основанія PQ: то и уголъ ABC больше угла POQ*. *25,I.
Естьли отнимемъ прямую OV равную каждой изъ прямыхъ OP, OQ; и протянемъ PV: то подобно докажемъ, что уголъ GHK больше угла POV.

При прямой LO, и при точкѣ на ней O, составь уголъ LOS равный углу ABC, а уголъ LOT равный углу GHK; и положи каждую изъ прямыхъ OS, OT равную прямой PO; и протяни PS, PT, ST.

Поелику двѣ прямыя AB, BC равны двумъ прямымъ PO, OS; и уголъ ABC равенъ углу POS: то основаніе AC, то есть прямая LM

равна основанію PS. Потому же и LN равна PT. И поелику двѣ прямыя ML, LN равны двумъ прямымъ SP, PT; а уголъ MLN больше угла SPT: то и основаніе MN больше
24,I. основанія ST. Но MN равна DF; посему и DF больше ST. Итакъ, поелику двѣ прямыя DE, EF равны двумъ прямымъ SO, OT; но основаніе DF больше основанія ST: то и
25,I. уголъ DEF больше угла SOT. Уголъ же SOT равенъ угламъ ABC, GHK; чего ради уголъ DEF есть больше угловъ ABC, GHK: онъ же и меньше; что невозможно.

Лемма. Мы покажемъ, какъ составить квадратъ изъ OR равный избытку квадрата изъ AB предъ квадратомъ изъ LO.

Пусть будутъ изложены прямыя AB, LO; и пусть AB будетъ большая: напиши на ней полукружіе ABC; и помѣсти въ полукружіи ABC прямую AC равную LO; и протяни BC.

Поелику уголъ ACB есть въ полукружіи
31,III. ABC; то уголъ ACB прямой. Посему квадратъ изъ AB равенъ квадратамъ изъ AC,
47,I. CB: и потому квадратъ изъ AB больше квадрата изъ AC квадратомъ изъ CB. Но AC равна LO; посему квадратъ изъ AB больше квадрата изъ LO квадратомъ изъ CB. Итакъ, естьли мы положимъ прямую OR равную BC: то квадратъ

изъ AB будетъ избытокъ квадрата изъ OL предъ квадратомъ изъ OR. Что мы и сдѣлать хотѣли.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIV.

Ежели тѣло содержится параллельными плоскостями; то противулежащія онаго плоскости суть параллелограммы равные.

Пусть будетъ CDHG тѣло содержимое параллельными плоскостями AC, GF, AH, DF, BF, AE. Говорю, что противулежащія онаго плоскости суть параллелограммы равные.

Поелику двѣ параллельныя плоскости BG, CE пересѣчены плоскостію AC; то общія ихъ сѣченія суть параллельныя: посему AB параллельна къ DC*. Еще же, по- *16.
елику двѣ параллельныя плоскости BF, AE пересѣчены плоскостію AC; то общія ихъ сѣченія суть параллельныя; посему BC параллельна къ AD. А доказано, что и AB параллельна къ DC: чего ради плоскость AC есть параллелограммъ*. Подобно дока- *оп. 36. I.
жемъ, что и каждая изъ плоскостей DF, FG, GB, BF, AE есть параллелограммъ.

Протяни AH, DF.

Поелику AB параллельна къ DC, а BH параллельна къ CF: то двѣ прямыя AB, BH,

взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ другимъ двумъ прямымъ DC, CF, взаимно встрѣчающимся и нележащимъ на тойже плоскости; посему сіи прямыя будутъ содер-
10. жать углы равные: а посему уголъ ABH равенъ углу DCF. И поелику двѣ прямыя
34,1. AB, BH равны двумъ прямымъ DC, CF; и уголъ ABH равенъ углу DCF: то основаніе AH равно основанію DF; и треугольникъ ABH равенъ треугольнику DCF. Но треугольника ABH есть двукратный паралле-
34,1. лограммъ BG, а треугольника DCF двукратный параллелограммъ CE: посему параллелограммъ BG равенъ параллелограмму CE. Подобно докажемъ, что параллелограммъ AC равенъ параллелограмму GF, а параллелограммъ AE параллелограмму BF.

Итакъ, ежели тѣло содержится, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXV.

Ежели параллелепипедъ пересѣченъ будетъ плоскостію параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: то оный разсѣчется на два тѣла, пераллелепипеды же, кои суть взаимно какъ основанія.

Пусть параллелепипедъ ABCD будетъ

пересѣченъ плоскостїю FG параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ RA, DH. Говорю, что какъ основанїе AEFV къ основанїю EHCF, такъ тѣло ABFU къ тѣлу EGCD. Продолжи AH на обѣ стороны; и положи сколько ниесть прямыхъ AK, KL равныхъ прямой AE; положи также сколько ниесть прямыхъ HM, MN равныхъ прямой EH; и дополни параллелограммы LP, KV, HX, MS, и параллелепипеды LQ, KR, DM, MT.

Поелику прямыя LK, KA, AE взаимно равны; то равны и параллелограммы LP, KV, AF взаимно, и параллелограммы KO, KB, AG взаимно*: еще же и параллелограммы LY, KQ, *36, 1.
AK равны взаимно*, ибо суть противулежащїе. *24.
Потому же равны суть, и параллелограммы EC, HX, MS взаимно, и параллелограммы HG, HJ, JN взаимно, еще же и параллелограммы DH, MZ, NT взаимно. Итакъ три плоскости котораго либо изъ тѣлъ LQ, KR, AU равны тремъ плоскостямъ другаго. Но у каждаго тѣла оныя три плоскости равны прочимъ тремъ противулежащимъ*: посему три тѣла *24.
LQ, KR, AU суть взаимно равны*. Потому *опр. 10.
же и три тѣла ED, DM, MT взаимно равны. Итакъ сколько кратное есть основанїе LF основанїя AF, столько кратное есть и тѣло LU тѣла AU. Потому же сколько кратное

есть основанїе NF основанїя FH, столько кратное есть и тѣло NU тѣла HU. И естьли основанїе LF равно основанїю NF, то и тѣло LU равно тѣлу NU; и естьли основанїе LF больше основанїя NF, то и тѣло LU больше тѣла NU; и естьли меньше, то меньше. Итакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть, двухъ основанїй AF, FH, и двухъ тѣлъ AU, UH, взяты основанїя AF и тѣла AU равнократныя, основанїе LF и тѣло LU; а основанїя HF и тѣла HU равнократныя основанїе NF и тѣло NU: и доказано, что естьли основанїе LF больше основанїя NF, то и тѣло LU больше тѣла NU; и естьли равно, то равно; и естьли меньше, то меньше: слѣдственно какъ основанїе AF къ основанїю FH, такъ тѣло
оп. 5, V. AU къ тѣлу UH. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVI.

При данной прямой, и при данной на ней точкѣ, составить толстый уголъ, равный данному толстому углу.

Пусть будетъ AB данная прямая, и A данная на ней точка: и уголъ при D данный толстый уголъ, содержимый плоскими углами EDC, EDF, FDC. Надлежитъ при прямой

AB, и при точкѣ на ней A, составить толстый уголъ, равный толстому углу при D.

Возьми на DF какую ниесть точку F; и проведи отъ F, перпендикулярную къ плоскости прямыхъ ED, DC, прямую FG*, и *11.
пусть она встрѣтитъ сію плоскость въ G; и протяни DG; и при прямой AB, и при точкѣ на ней A, составь уголъ BAL равный углу EDC, и уголъ BAK равный углу EDG; и положи прямую AK равную DG; и отъ точки K возставь, подъ прямыми углами къ плоскости прямыхъ BA, AL, прямую KH*; *12.
и положи KH равную GF; и протяни HA. Говорю, что толстый уголъ при A, содержимый углами BAL, BAH, HAL, равенъ толстому углу при D, содержимому углами EDC, EDF, FDC.

Отними равныя прямыя AB, DE; и протяни HB, KB, FE, GE. Поелику FG перпендикулярна къ подлежащей плоскости; то она со всѣми прямыми, съ нею встрѣчающимися и на сей плоскости лежащими, дѣлаетъ углы прямые*: посему каждый изъ *опр.3.
угловъ FGD, FGE есть прямой. Потому же и каждый изъ угловъ HKA, HKB есть прямой. И поелику двѣ прямыя KA, AB равны двумъ прямымъ GD, DE, каждая каждой;

и содержатъ углы равные: то основанїе BK
4,1. равно основанїю EG. Но и KH равна GF; и
каждый изъ угловъ HKB, FGE прямой: по-
4,1. сему HB равна FE. Еще же, поелику двѣ
прямыя AK, KH равны двумъ прямымъ
DG, GF, и содержатъ углы прямые: то
основанїе AH равно основанїю DF. Но и AB
равна DE: итакъ двѣ прямыя HA, AB равны
двумъ прямымъ FD, DE; и основанїе HB
равно основанїю FE: посему уголъ BAH
8,1. равенъ углу EDF. Потому же уголъ HAL
равенъ углу FDC: ибо положивъ AL
равную DC, и протянувъ KL, HL, GC, FC,
поелику цѣлый уголъ BAL равенъ цѣлому
EDC; и въ нихъ уголъ BAK равенъ углу
EDG: то остальной уголъ KAL будетъ
равенъ остальному GDC. Поелику же двѣ
прямыя KA, AL равны двумъ прямымъ
GD, DC, и содержатъ углы равные: то
основанїе KL равно основанїю GC. Но и KH
равна GF: итакъ двѣ прямыя LK, KH равны
двумъ прямымъ CG, GF; и содержатъ углы
прямые: посему основанїе HL равно основа-
нїю FC. Еще же, поелику двѣ прямыя
HA, AL равны двумъ прямымъ FD, DC; и
основанїе HL равно основанїю FC: то
уголъ HAL равенъ углу FDC. А и уголъ
BAL равенъ углу EDC:

Итакъ при данной прямой, и при данной на ней точкѣ, составленъ толстый уголъ, равный данному толстому углу. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVII.

Изъ данной прямой написать параллелепипедъ, подобный данному параллелепипеду и подобно положенный.

Пусть будетъ AB данная прямая, и DC данный параллелепипедъ. Надлежитъ изъ данной прямой AB написать параллелепипедъ, подобный данному параллелепипеду DC и подобно положенный.

При прямой AB, и при точкѣ на ней A, составь, равный толстому углу при C, толстый уголъ*, содержимый плоскими углами BAH, HAK, KAB, такъ чтобы равенъ былъ уголъ BAH углу ECF, и уголъ BAK углу ECG, и еще уголъ KAH углу GCF; сдѣлай какъ EC къ CG, такъ BA къ AK*; и какъ GC къ CF, такъ KA къ AH: посему равномѣстно, какъ EC къ CF, такъ BA къ AH*. Дополни параллелограммъ BH, и параллелепипедъ AL.

*26.

*12, VI.

*22, V.

Поелику какъ EC къ CG, такъ BA къ AK; и сіи пропорціональныя стороны суть около равныхъ угловъ ECG, BAK: посему

параллелограммъ GE подобенъ параллелограмму KB. Потому же параллелограммъ KH подобенъ параллелограмму GF; и параллелограммъ FE параллелограмму HB. Итакъ три параллелограмма параллелепипеда CD подобны тремъ параллелограммамъ параллелепипеда AL. Но сіи три и равны тремъ
24. прочимъ противулежащимъ, и подобны
опр. 1, VI. имъ. Чего ради и цѣлый параллелепипедъ
опр. 9. CD подобенъ цѣлому параллелепипеду AL.

Итакъ изъ данной прямой AB написанъ параллелепипедъ AL, подобный данному параллелепипеду CD и подобно положенный. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXVIII.

Ежели параллелепипедъ пересѣченъ будетъ плоскостію чрезъ діагонали противулежащихъ его плоскостей: то оный разсѣченъ будетъ сею плоскостію по поламъ.

Пусть параллелепипедъ AB будетъ пересѣченъ плоскостію CDEF чрезъ діагонали CF, DE двухъ противулежащихъ его плоскостей. Говорю, что параллелепипедъ AB разсѣченъ плоскостію CDEF по поламъ.

Поелику треугольникъ CGF равенъ тре-
34, I. угольнику CFB, а треугольникъ ADE

треугольнику DEH; поелику же и параллелограммъ CA равенъ параллелограмму BE*, ибо *24.
они суть противулежащія плоскости; потому же и параллелограммъ GE равенъ параллелограмму CH: то призма, содержимая двумя треугольниками CGF, ADE и тремя параллелограммами GE, AC, CE, равна призмѣ, содержимой двумя треугольниками CFB, DEH и тремя параллелограммами CH, BE, CE*, ибо онѣ содержатся равномногими и *опр.10.
равными плоскостями. Итакъ цѣлый параллелепипедъ AB разсѣченъ плоскостію CDEF по поламъ. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXIX.

Параллелепипеды, имѣющіе тоже основаніе и туже высоту, и коихъ надстоящія оканчиваются на тѣхъже прямыхъ, суть взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды CM, CN, имѣющіе тоже основаніе AB, и туже высоту; и пусть надстоящія ихъ AG, AF, LM, LN, CD, CE, BH, BK будутъ на тѣхъже прямыхъ FN, DK. Говорю, что параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN.

Поелику каждая изъ фигуръ CH, CK есть параллелограммъ*: то каждая изъ прямыхъ *24.

34,1. DH, EK равна прямой CB; посему и DH равна EK. Отними обще EH: посему остальная DE равна остальной HK; слѣдственно и треугольникъ DEC равенъ треугольнику
8,1. HKB, и параллелограммъ DG параллело-
36,1. грамму HN. Потому же треугольникъ FAG равенъ треугольнику MLN. Еще же, параллелограммъ CF равенъ параллелограмму BM; и параллелограммъ CG параллелограмму
24. BN: ибо суть противулежащіе. Итакъ призма, содержимая двумя треугольниками AFG, CDE и тремя параллелограммами AD, DG, GC, равна призмѣ, содержимой двумя треугольниками MLN, HBK и тремя па-
опр.10. раллелограммами BM, HN, NB. Придай къ каждой изъ сихъ призмъ тѣло, коего основаніе есть параллелограммъ AB, а противулежащая плоскость GEHM: посему цѣлый параллелепипедъ CM будетъ равенъ цѣлому параллелепипеду CN.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXX.

Параллелепипеды, имѣющіе тоже основаніе и туже высоту, и коихъ надстоящія оканчиваются не на тѣхъже прямыхъ, суть взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды CM, CN, имѣющіе тоже основаніе AB, и туже высоту; но пусть надстоящія ихъ AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK оканчиваются не на тѣхъже прямыхъ. Говорю, что параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN.

Продолжи NK, DH, и GE, FM, и пусть встрѣтятся онѣ въ точкахъ P, R, Q, O; и протяни AO, LP, CQ, BR.

Итакъ параллелепипедъ CM, имѣющій основаніемъ параллелограммъ ACBL противулежащій параллелограмму FDHM, равенъ параллелепипеду CP, имѣющему основаніемъ параллелограммъ ACBL противулежащій параллелограмму OQRP*; ибо они имѣютъ *29.
тоже основаніе ACBL, и надстоящія ихъ AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH, BR оканчиваются на тѣхъже прямыхъ FP, DR. Но параллелепипедъ CP, имѣющій основаніемъ параллелограммъ ACBL противулежащій параллелограмму OQRP, равенъ параллелепипеду CN, имѣющему основаніемъ параллелограммъ ACBL противулежащій параллелограмму GEKN*: ибо и они имѣютъ тоже осно- *29.
ваніе ACBL, и надстоящія ихъ AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK, BR оканчиваются на тѣхъже прямыхъ GQ, NR. Чего ради параллелепипедъ CM равенъ параллелепипеду CN.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXI.

Параллелепипеды, имѣющіе равныя основанія и туже высоту, суть взаимно равные.

Пусть будутъ параллелепипеды AE, CF, имѣющіе равныя основанія AB, CD, и туже высоту. Говорю, что параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF.

Пусть, вопервыхъ, будутъ надстоящія HK, BE, AG, LM, PQ, DF, CO, RS подъ прямыми углами къ основаніямъ AB, CD; и пусть уголъ ALB будетъ не равенъ углу CRD.

Проведи впрямъ съ CR прямую RT; и при прямой RT, и при точкѣ на ней R, составь уголъ TRU равный углу ALB; и положи прямую RT равную AL, и прямую RU равную LB; и чрезъ точку U проведи параллельную къ RT прямую UX; и дополни основаніе RX, и параллелепипедъ YU. Поелику двѣ прямыя TR, RU равны двумъ прямымъ AL, LB; и содержатъ углы равные:
14, VI. то параллелограммъ RX равенъ и подо-
опр. 1, VI. бенъ параллелограмму HL. Еще же, поелику RT равна AL, и RS равна LM; и содержатъ углы прямые: то параллелограммъ RY равенъ и подобенъ параллелограмму AM.

Потому же и параллелограммъ LE равенъ и подобенъ параллелограмму SU. Итакъ три параллелограмма параллелепипеда AE равны тремъ параллелограммамъ параллелепипеда YU, и подобны имъ. И поелику у каждаго сіи три равны прочимъ тремъ противулежащимъ* и подобны имъ: то и цѣлый па- *24.
раллелепипедъ AE равенъ цѣлому параллеле- *опр. 10.
пипеду YU*. Продолжи прямыя DR, XU, и пусть онѣ встрѣтятся въ Z; и чрезъ T проведи, параллельную къ DZ, прямую Tt; и продолжи прямыя Tt, и PD, и пусть онѣ встрѣтятся въ *a*; и дополни параллелепипеды ZY, RJ.

Итакъ параллелепипедъ YZ, имѣющій основаніемъ параллелограммъ RY противулежащій параллелограмму Zp, равенъ параллелепипеду YU, имѣющему основаніемъ параллелограммъ RY противулежащій па-
раллелограмму UV*; ибо они имѣютъ то- *29.
же основаніе RY, и туже высоту, и надстоящія ихъ RZ, RU, Tt, TX, Ss, SN, Yp, YV оканчиваются на тѣхъже прямыхъ ZX, sV. Но параллелепипедъ YU равенъ параллелепипеду AE: посему и параллелепипедъ YZ равенъ параллелепипеду AE. И поелику параллелограммъ RUXT равенъ параллелограмму ZT*, ибо они стоятъ *35, 1.
на томъже основаніи RT, и между тѣмиже

параллельными RT, ZX; а параллелограммъ RUXT равенъ и параллелограмму CD, ибо равенъ AB: посему параллелограммъ ZT равенъ параллелограмму CD. Но DT есть другой параллелограммъ: посему какъ основанїе CD къ основанїю DT, такъ основанїе
7,V. ZT къ основанїю DT. И поелику параллелепипедъ CJ пересѣченъ плоскостїю RF параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ; то какъ основанїе CD къ осно-
25. ванїю DT, такъ тѣло CF къ тѣлу RJ. Такожъ, поелику параллелепипедъ ZJ пересѣченъ плоскостїю RY параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ; то какъ основанїе ZT къ основанїю DT, такъ тѣло ZY къ тѣлу RJ. Но какъ основанїе CD къ основанїю DT, такъ основанїе ZT къ основанїю DT: посему какъ тѣло CF къ
11,V. тѣлу RJ, такъ тѣло ZY къ тѣлу RJ. Итакъ каждое изъ тѣлъ CF, ZY къ тѣлу RJ имѣетъ тоже отношенїе: посему тѣ-
9,V. ло CF равно тѣлу или параллелепипеду ZY. А доказано, что параллелепипедъ ZY равенъ и параллелепипеду AE: слѣдственно параллелепипедъ AE равенъ тѣлу CF.

Но пусть надстоящїя AG, HK, BE, LM, CO, PQ, DF, RS не будутъ подъ прямыми углами къ основанїямъ AB, CD. Говорю еще,

что параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF.

Отъ точекъ K, E, G, M, Q, F, O, S проведи, перпендикулярныя къ подлежащей плоскости, прямыя KN, ET, GU, MV, QX, FY, OZ, SJ*, и пусть онѣ встрѣтятся съ плос- *11.
костію въ точкахъ N, T, U, V, X, Y, Z, J; и протяни NT, UV, NU, TV, XY, XZ, ZJ, YJ.

Итакъ параллелепипедъ KV равенъ параллелепипеду QJ; ибо они имѣютъ равныя основанія KM, QS, и туже высоту, и надстоящія ихъ суть къ основаніямъ подъ прямыми углами. Но параллелепипедъ KV равенъ параллелепипеду AE, а QJ равенъ CF*; ибо *30.
они имѣютъ тоже основаніе и туже высоту, и надстоящія ихъ оканчиваются не на тѣхъже прямыхъ. Чего ради параллелепипедъ AE равенъ параллелепипеду CF.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXII.

Параллелепипеды, имѣющіе туже высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пусть будутъ AB, CD параллелепипеды, имѣющіе туже высоту. Говорю, что параллелепипеды AB, CD суть взаимно какъ основанія; то есть, какъ основаніе AE

къ основанію CF, такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD.

По прямой FG поставь, равный паралле-
45,I. лограмму AE, параллелограммъ FH; и изъ основанія FH, а по высотѣ параллелепипеда CD, дополни параллелепипедъ GK.

Итакъ параллелепипедъ AB равенъ парал-
31. лелепипеду GK; ибо они имѣютъ равныя основанія AE, FH, и туже высоту. И поелику параллелепипедъ CK пересѣченъ плоскостію DG параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: то какъ основаніе HF къ осно-
25. ванію CF, такъ тѣло HD къ тѣлу DC. Но основаніе FH равно основанію AE, а тѣло GK равно параллелепипеду AB: чего ради и какъ основаніе AE къ основанію CF, такъ
7и11,V. параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIII.

Подобные параллелепипеды взаимно суть въ утроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ AB,CD подобные параллелепипеды, и пусть будутъ AE, CF сходственныя ихъ стороны. Говорю, что параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ

утроенное отношенїе прямыя AE къ CF.

Продолжи впрямъ съ AE, GE, HE прямыя EK, EL, EM; и положи прямую EK равную CF, и EL равную FN, и еще EM равную FR; и дополни параллелограммъ KL, и параллелепипедъ KP.

Поелику двѣ прямыя KE, EL равны двумъ прямымъ CF, FN; и уголъ KEL равенъ углу CFN, ибо уголъ AEG равенъ углу CFN, по подобїю параллелепипедовъ AB, CD: посему параллелограммъ KL равенъ и подобенъ параллелограмму CN. Потому же и параллелограммъ KM равенъ и подобенъ параллелограмму CR, и параллелограммъ EP параллелограмму DF. Итакъ три параллелограмма параллелепипеда KP равны тремъ параллелограммамъ параллелепипеда CD и подобны имъ. Но у каждаго сїи три равны прочимъ тремъ противулежащимъ, и подобны имъ; посему цѣлый параллелепипедъ KP равенъ и подобенъ цѣлому параллелепипеду CD*. Дополни параллелограммъ GK; и изъ основанїй GK, KL, а по высотѣ параллелепипеда AB, дополни параллелепипеды EO, LQ. Поелику, по подобїю* параллелепипедовъ AB, CD, какъ AE къ CF, такъ EG къ FN, и такъ EH къ FR*; но FC равна EK, а FN равна EL, и еще FR равна EM: то будетъ какъ AE къ EK,

*опр. 10.

*опр. 9.

*оп. 1, VI.

7 и п, V. такъ GE къ EL, и такъ HE къ EM. Но
какъ AE къ EK, такъ параллелограммъ AG
1, VI. къ параллелограмму GK; и какъ GE къ EL,
такъ параллелограммъ GK къ KL; и еще, какъ
HE къ EM, такъ параллелограммъ QE къ
KM: посему какъ параллелограммъ AG къ
GK, такъ параллелограммъ GK къ KL, и
11, V. такъ параллелограммъ QE къ KM. Но какъ
AG къ GK, такъ параллелепипедъ AB къ
29 и 32. параллелепипеду EO; и какъ GK къ KL, такъ
параллелепипедъ OE къ параллелепипеду QL;
и еще, какъ QE къ KM, такъ параллелепи-
педъ QL къ параллелепипеду KP: посему
какъ параллелепипедъ AB къ EO, такъ
параллелепипедъ EO къ QL, и такъ парал-
лелепипедъ QL къ KP. Но естьли четыре
величины непрерывно пропорціональны: то
первая къ четвертой имѣетъ утроенное
оп. 11, V. отношеніе первыя ко второй: посему па-
раллелепипедъ AB къ KP имѣетъ утроенное
отношеніе параллелепипеда AB къ EO. А
какъ AB къ EO, такъ параллелограммъ AG
къ GK, и такъ прямая AE къ EK: посему
параллелепипедъ AB къ KP имѣетъ утроен-
ное отношеніе прямыя AE къ EK. Но парал-
лелепипедъ KP равенъ параллелепипеду CD, и
прямая EK прямой CF. Чего ради параллеле-
пипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ

утроенное отношенїе сходственной стороны AE къ сходственной сторонѣ CE.

Слѣдствїе. Отсюда явствуетъ, что есть ли четыре прямыя пропорцїональны (44); то какъ первая къ четвертой, такъ параллелепипедъ изъ первой къ параллелепипеду подобному и подобно написанному изъ второй: ибо и первая къ четвертой имѣетъ утроенное отношенїе первыя ко второй*. *оп. 11, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIV.

Равныхъ параллелепипедовъ основанїя суть обратно пропорцїональны высотамъ: И которыхъ параллелепипедовъ основанїя обратно пропорцїональны высотамъ, тѣ суть равные.

Пусть будутъ AB, CD равные параллелепипеды. Говорю, что параллелепипедовъ AB, CD основанїя суть обратно пропорцїональны высотамъ, то есть, какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB.

Вопервыхъ, пусть надстоящїя AG, EF, LB, HK, CM, NO, PD, QR будутъ подъ прямыми углами къ основанїямъ. Говорю, что

какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ CM къ AG.

Естьли основанїе EH равно основанїю NQ, а и параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD; то и высота CM равна высотѣ AG. Ибо когда основанїя EH, NQ равны, а высоты AG, CM не были бы равны; то и параллелепипедъ AB, не былъ бы равенъ
31. параллелепипеду CD. Но онъ равенъ, по положенїю; посему и высота CM не неравна высотѣ AG, слѣдственно равна. Чего ради какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ CM къ AG: и потому явно, что параллелепипедовъ AB, CD основанїя суть обратно пропорцїональны высотамъ.

Но пусть основанїе EH не будетъ равно основанїю NQ, и пусть EH будетъ большее. (ф.2). И поелику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD; то высота CM больше высоты AG: буде же нетакъ, то параллелепипеды
31. AB, CD опять не были бы равны; а они равны суть, по положенїю. Итакъ положи CT равную AG; и изъ основанїя NQ, а по высотѣ CT, дополни параллелепипедъ VC. Поелику параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD, и CV есть другой нѣкїй параллелепипедъ; а равныя величины къ той-
7, V. же имѣютъ тоже отношенїе: то какъ

параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CV, такъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду CV. Но какъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CV, такъ основанїе EH къ основанїю NQ*, ибо параллелепипеды AB, CV суть равновысотные; а какъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду CV, такъ основанїе MQ къ основанїю QT*, и такъ MC къ CT: посему и какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ MC къ CT*. Но CT равна AG: посему какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ MC къ AG*. Чего ради основанїя параллелепипедовъ AB, CD суть обратно пропорцїональны высотамъ. *32. *25. *11, V. *7 и 11, V.

Еще же, пусть основанїя параллепипедовъ AB, CD будутъ обратно пропорцїональны высотамъ; то есть, какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB. Говорю, что параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD.

Пусть еще надстоящїя будутъ къ основанїямъ подъ прямыми углами.

Естьли основанїе EH равно основанїю NQ; то, поелику какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB, и высота параллелепипеда CD равна будетъ высотѣ параллелепипеда AB. Но параллелепипеды,

имѣющїе равныя основанїя и туже высоту,
31. суть взаимно равные: чего ради параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD.

Но пусть основанїе EH не будетъ равно основанїю NQ, и пусть EH будетъ большее: то и высота параллелепипеда CD будетъ больше высоты параллелепипеда AB, то есть, CM будетъ больше AG. Опять положи CT равную AG, и дополни также параллелепипедъ CV. И поелику какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ CM къ AG; но AG равна CT: то какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ MC къ CT. Но какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ па-
32. раллелепипедъ AB къ параллелепипеду CV, ибо параллелепипеды AB, CV суть равновысотные; а какъ MC къ CT, такъ основанїе
1,VI. MQ къ основанїю QT, и такъ параллелепи-
32. педъ CD къ параллелепипеду CV: посему какъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CV, такъ параллелепипедъ CD къ параллелепипеду CV; а посему каждый изъ параллелепипедовъ AB, CD къ параллелепипеду CV имѣетъ тоже отношенїе. Итакъ параллелепипедъ AB равенъ параллелепипе-
9,V. ду CD. Что и доказать надлежало.

Но пусть надстоящїя FE, BL, GA, KH, ON, DP, MC, RQ (ф. 3). не будутъ къ основанїямъ

параллелепипедовъ подъ прямыми углами. Отъ точекъ F, G, B, K, O, M, D, R проведи къ плоскостямъ основанiй EH, NQ, перпендикулярныя прямыя, кои пусть встрѣтятъ сiи плоскости въ точкахъ S, T, U, V, X, Y, *a*, Z; и дополни параллелепипеды FV, OZ. Говорю, что равныхъ параллелепипедовъ AB, CD основанiя суть обратно пропорцiональны высотамъ; то есть, какъ основанiе EH къ основанiю NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB.

Поелику парллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD: но параллелепипеду AB равенъ параллелепипедъ BT*, ибо они *30.
имѣютъ тоже основанiе FK, и туже высоту, и надстоящiя ихъ оканчиваются не на тѣхъ же прямыхъ; а параллелепипедъ CD равенъ параллелепипеду DY, ибо и они имѣютъ тоже основанiе RO, и туже высоту, и надстоящiя ихъ оканчиваются не на тѣхъже прямыхъ: то и параллелепипедъ BT равенъ параллелепипеду DY. А равныхъ параллелепипедовъ, коихъ высоты суть подъ прямыми углами къ основанiямъ, основанiя суть обратно пропорцiональны высотамъ: посему какъ основанiе FK къ основанiю OR, такъ вы-

сота параллелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT. Но основанїе FK равно основанїю EH, основанїе же OR основанїю
24. NQ: посему какъ основанїе EH къ основа-
7 и 11, V. нїю NQ, такъ высота паралелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT. Но высоты парллелепипедовъ DY, BT суть тѣже, что и параллелепипедовъ DC, BA: посему какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ высота параллелепипеда DC къ высотѣ параллелепипеда AB. Чего ради основанїя параллелепипедовъ AB, CD суть обратно пропорцїональны высотамъ.

Пусть наконецъ основанїя параллелепипедовъ AB, CD будутъ обратно пропорцїональны высотамъ; то есть, какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB. Говорю, что параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD.

Ибо, сдѣлавъ тоже строенїе, поелику какъ основанїе EH къ основанїю NQ, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB; и основанїе EH равно основанїю FK, основанїе же NQ основанїю OR: то какъ основанїе FK къ основанїю OR, такъ высота параллелепипеда CD къ высотѣ параллелепипеда AB. Но высоты

параллелепипедовъ AB, CD суть тѣже, что и параллелепипедовъ BT, DY: посему какъ основанїе FK къ основанїю OR, такъ высота параллелепипеда DY къ высотѣ параллелепипеда BT; а посему основанїя параллелепипедовъ BT, DY суть обратно пропорцїональны высотамъ. А которыхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ высоты подъ прямыми углами къ основанїямъ, основанїя обратно пропорцїональны высотамъ, тѣ суть взаимно равные: посему параллелепипедъ BT равенъ параллелепипеду DY. Но параллелепипедъ BT равенъ параллелепипеду AB*, ибо они имѣютъ тоже основанїе FK, и туже высоту, и надстоящїя ихъ оканчиваются не на тѣхъже прямыхъ; а параллелепипедъ DY равенъ параллелепипеду DC, ибо и они имѣютъ тоже основанїе OR, и туже высоту, и надстоящїя ихъ оканчиваются не на тѣхъже прямыхъ: итакъ параллелепипедъ AB равенъ параллелепипеду CD. ч. и д. н. (91). *30.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXV.

Ежели будутъ два плоскїе угла равные, и отъ вершинъ ихъ возставятся въ высоту прямыя содержащїя со сторонами ихъ,

углы равные, каждый каждому; и естьли на сихъ прямыхъ взяты будутъ какія ниесть точки, и отъ сихъ точекъ проведутся перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ данныхъ угловъ; и естьли изъ точекъ, въ коихъ онѣ встрѣтятъ плоскости, протянуты будутъ прямыя къ вершинамъ данныхъ угловъ: то углы, содержимые сими прямыми съ прямыми возставленными отъ вершинъ угловъ въ высоту ихъ плоскостей, будутъ взаимно равные.

Пусть будутъ два плоскіе угла BAC, EDF равные; и пусть отъ вершинъ ихъ A, D будутъ возставлены въ высоту прямыя AG, DM, содержащія со сторонами ихъ углы равные, каждый каждому, а именно, уголъ GAB равный углу MDE, а уголъ GAC углу MDF; и пусть на прямыхъ AG, DM взяты будутъ какія ниесть точки G, M, и отъ точекъ G, M проведутся перпендикулярныя къ плоскостямъ BAC, EDF прямыя GL, MN, кои пусть встрѣтятъ сіи плоскости въ L, N; и пусть будутъ протянуты прямыя LA, ND. Говорю, что уголъ GAL равенъ углу MDN.

Положи AH равную DM; и чрезъ H проведи, параллельную къ GL, прямую HK. И поелику GL перпендикулярна къ плоскости

прямыхъ BA, AC; то и HK перпендикулярна къ плоскости прямыхъ BA, AC*. Отъ точекъ K, N проведи, перпендикулярныя къ прямымъ AB, AC, DF, DE, прямыя KB, KC, NF, NE; и протяни HC, CB, MF, FE. Поелику квадратъ изъ HA равенъ квадратамъ изъ HK, KA*; квадрату же изъ KA равны квадраты изъ KC, CA: то квадратъ изъ HA равенъ квадратамъ изъ HK, KC, CA. А квадратамъ изъ HK, KC равенъ квадратъ изъ HC: посему квадратъ изъ HA равенъ квадратамъ изъ HC, CA; а посему уголъ HCA есть прямой*. Потому же и уголъ DFM прямой. Чего ради уголъ ACH равенъ углу DFM. Поелику же и уголъ HAC равенъ углу MDF; то два треугольника MDF, HAC имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежатъ равнымъ угламъ, а именно, сторону AH равную сторонѣ DM: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ, каждую каждой; а посему AC равна DF*. Подобно докажемъ, что и AB равна DE. Протяни HB, ME. И поелику квадратъ изъ AH равенъ квадратамъ изъ AK, KH; квадрату же изъ AK равны квадраты изъ AB, BK; то квадраты изъ AB, BK, KH равны квадрату изъ AH. Но квадратамъ

*8.

*47,1.

*48,1.

*26,1.

47,1. изъ BK, KH равенъ квадратъ изъ BH; ибо уголъ HKB прямой, потому что HK перпендикулярна къ подлежащей плоскости: посему квадратъ изъ AH равенъ квадратамъ изъ AB, BH; а посему уголъ ABH есть
48,1. прямой. Потому же и уголъ DEM прямой. Но уголъ BAH равенъ, по положенію, углу EDM; и AH равна DM: посему и AB равна DE. Итакъ, поелику AC равна DF, и AB равна DE; то двѣ прямыя CA, AB равны двумъ прямымъ FD, DE; и уголъ CAB равенъ углу FDE: посему и основаніе BC равно основанію EF, и треугольникъ равенъ треугольнику, и прочіе углы равны прочимъ
4,1. угламъ; а посему уголъ ACB равенъ углу DFE. Но прямой уголъ ACK равенъ прямому же углу DFN; посему и остальной уголъ BCK равенъ остальному EFN. Потому же и уголъ CBK равенъ углу FEN. Итакъ два треугольника CBK, FEN имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; и одну сторону равную одной сторонѣ, кои прилежатъ равнымъ угламъ, а именно, сторону BC равную сторонѣ EF: посему и прочія стороны будутъ имѣть равныя про-
26,1. чимъ сторонамъ; а посему CK равна FN. Но и AC равна DF: итакъ двѣ прямыя AC, CK равны двумъ прямымъ DF, FN; и содержатъ

углы прямые: посему основанїе AK равно основанїю DN. И поелику AH равна DM; то квадратъ изъ AH равенъ квадрату изъ DM. Но квадрату изъ AH равны квадраты изъ AK, KH, ибо уголъ AKH есть прямой; а квадрату изъ DM, равны квадраты изъ DN, NM, ибо и уголъ DNM есть прямой: посему квадраты изъ AK, KH равны квадратамъ изъ DN, NM. Но квадратъ изъ AK равенъ квадрату изъ DN: посему и остальной квадратъ изъ KH равенъ остальному изъ NM; а посему и HK равна MN. Итакъ, поелику двѣ прямыяHA, AK равны двумъ прямымъ MD, DN, каждая каждой; и, по доказанному, основанїе HK равно основанїю NM; то и уголъ HAK равенъ углу MDN.

« Итакъ,ежели будутъ, и проч. ч. и д. н. »

Слѣдствїе. Отсюда явствуетъ, что естьли будутъ два плоскїе угла равные; и отъ вершинъ ихъ возставятся въ высоту прямыя взаимно равныя, содержащїя со сторонами сихъ угловъ углы равные, каждый каждому: то прямыя, проводимыя отъ концовъ возставленныхъ прямыхъ, перпендикулярно къ плоскостямъ первыхъ угловъ, суть взаимно равныя.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVI.

Ежели три прямыя пропорціональны; то параллелепипедъ изъ всѣхъ трехъ равенъ равносторонному параллелепипеду изъ средней, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Пусть будутъ три прямыя A, B, C пропорціональныя; а именно, какъ A къ B, такъ B къ C. Говорю, что параллелепипедъ изъ всѣхъ трехъ A, B, C равенъ равностороннему параллелепипеду изъ B, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Изложи какой ниесть толстый уголъ при E, содержимый тремя плоскими углами DEG, GEF, FED; и положи каждую изъ прямыхъ DE, GE, EF равную B; и дополни параллелепипедъ EK. И положи прямую LM равную A; и при прямой LM, и при точкѣ на ней L, составь, равный
26. толстому углу при E, толстый уголъ, содержимый плоскими углами NLO, OLM, MLN; и положи прямую LO равную B, и LN равную C.

Поелику какъ A къ B, такъ B къ C; но A равна LM, а B равна каждой изъ прямыхъ LO, EF, EG, ED, и C равна LN: то какъ
7 и 11, V. LM къ EF, такъ DE къ LN; посему

стороны около равныхъ угловъ MLN, DEF суть обратно пропорціональныя: а посему параллелограммъ MN равенъ параллелограмму DF*. И поелику два плоскіе прямолинейные *14,VI.
угла DEF, NLM суть равные; и отъ вершинъ ихъ возставлены въ высоту прямыя LO,EG взаимно равныя, и содержащія, со сторонами сихъ угловъ, углы равные, каждый каждому; то отъ точекъ G, O проведенныя перпендикулярныя прямыя къ плоскостямъ NLM, DEF, взаимно равны*: слѣдственно *слѣ.35.
параллелепипеды LH, EK имѣютъ туже высоту. Но параллелепипеды, имѣющіе равныя основанія и туже высоту, суть взаимно равные*: посему параллелепипедъ HL равенъ *31.
параллелепипеду EK. Но параллелепипедъ HL есть изъ A, B, C; а параллелепипедъ EK есть изъ B: чего ради параллелепипедъ изъ A, B, C равенъ равносторонному параллелепипеду изъ B, и равноугольному съ параллелепипедомъ преждесказаннымъ.

Итакъ, ежели три прямыя, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVII.

Ежели четыре прямыя пропорціональны; то параллелепипеды изъ оныхъ, подобные и подобно написанные, будутъ пропорціо-

нальные: И ежели параллелепипеды, подобные и подобно изъ четырехъ прямыхъ написанные, пропорцїональны; то и самыя прямыя будутъ пропорцїональныя.

Пусть будутъ четыре прямыя AB, CD, EF, GH пропорцїональныя; а именно, какъ AB къ CD, такъ EF къ GH; и пусть будутъ написаны изъ прямыхъ AB, CD, EF, GH подобные и подобно положенные паралелепипеды KA, LC, ME, NG. Говорю, что какъ KA къ LC, такъ ME къ NG.

Поелику параллелепипедъ KA подобенъ параллелепипеду LC: то параллелепипедъ KA къ LC имѣетъ утроенное отношенїе
33. прямыя AB къ CD. Потому же параллелепипедъ ME къ NG имѣетъ утроенное отношенїе прямыя EF къ GH. Но какъ AB къ CD, такъ EF къ GH: чего ради какъ
11, V. AK къ LC, такъ ME къ NG.

Но пусть будетъ какъ параллелепипедъ AK къ параллелепипеду LC, такъ параллелепипедъ ME къ параллелепипеду NG. Говорю, что какъ прямая AB къ CD, такъ прямая EF къ GH.

Поелику параллелепипедъ KA къ LC имѣетъ утроенное отношенїе прямыя AB къ CD; и параллелипедъ ME къ NG имѣетъ утроенное же отношенїе прямыя EF къ

GH; и поелику какъ KA къ LC, такъ ME къ NG: то какъ AB къ CD, такъ EF къ GH*. *11,V.

Итакъ, ежели четыре, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXVIII.

Ежели плоскость къ плоскости перпендикулярна; и отъ какой ниесть точки, взятой на одной изъ нихъ, проведена будетъ прямая перпендикулярная къ другой плоскости: то сія проведенная перпендикулярная упадетъ на общее плоскостей сѣченіе.

Пусть плоскость CD будетъ къ плоскости AB перпендикулярная; и общее ихъ сѣченіе пусть будетъ AD; и пусть на плоскости CD взята будетъ какая ниесть точка E. Говорю, что отъ E проведенная прямая, перпендикулярная къ плоскости AB, упадетъ на прямую DA.

Ибо, естьли не такъ; то пусть, буде возможно, она упадетъ внѣ AD, какъ EF, и пусть встрѣтитъ плоскость AB въ точкѣ F. Отъ F проведи на плоскости AB, перпендикулярную къ DA, прямую FG; то она будетъ перпендикулярна и къ плоскости CD*: и протяни EG. *опр.4.

Поелику FG перпендикулярна къ плоскости CD; встрѣчаетъ же она прямую EG,

которая на плоскости CD: то уголъ FGE
опр.3. есть прямой. Но EF перпендикулярна къ плоскости AB: посему и уголъ EFG есть прямой. Итакъ треугольника EFG два угла
17,1. равны двумъ прямымъ; что нелѣпо: посему отъ точки E проведенная перпендикулярная прямая къ плоскости AB не падаетъ внѣ прямой DA; слѣдственно упадетъ на прямую DA.

Итакъ, ежели плоскость, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XXXIX.

Ежели параллелепипеда стороны двухъ какихъ нибудь противулежащихъ плоскостей будутъ разсѣчены по поламъ; и чрезъ сѣченія будутъ проведены плоскости: то общее сѣченіе сихъ плоскостей и поперечникъ параллелепипеда пересѣкутся по поламъ.

Параллелепипеда AF пусть стороны двухъ противулежащихъ плоскостей CF, AH будутъ разсѣчены по поламъ въ точкахъ K, L, M, N, O, Q, P, R; и чрезъ сѣченія пусть будутъ проведены плоскости KN, OR; и пусть общее сѣченіе сихъ плоскостей будетъ VS; а параллелепипеда поперечникъ пусть будетъ DG. Говорю,

что VS, DG взаимно пересѣкаются по поламъ, то есть, что VT равна TS, а DT равна TG.

Протяни DV, VE, BS, SG.

Поелику DO параллельна къ PE; то накосьлежащіе углы DOV, VPE взаимно равны*. *29,1.
И поелику DO равна PE, и OV равна VP, и содержатъ онѣ углы равные: то основаніе DV равно основанію VE; и треугольникъ DOV равенъ треугольнику PVE; и прочіе углы равны прочимъ угламъ: посему уголъ OVD равенъ углу PVE; итакъ линія DVE есть прямая*. Потомуже и линія *13и14,1.
BSG есть прямая, и BS равна SG. И поелику CA равна DB, и параллельна къ ней*; *24.
а и CA равна EG, и параллельна къ ней: то и DB равна EG*, и параллельна къ *акс.1.
ней*. Соединяютъ же концы ихъ прямыя *9.
DE, GB; посему и DE параллельна къ BG*. *33,1.
Взяты же на каждой изъ оныхъ точки D, V, G, S; и протянуты прямыя DG, VS: посему DG, VS суть на одной плоскости*. *7.
Итакъ, поелику DE параллельна къ BG; то уголъ EDT равенъ углу BGT, ибо суть накосьлежащіе: но и уголъ DTV равенъ углу* *29,1.
GTS*: Чего ради два треугольника DTV, GTS *15,1.
имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, и одну сторону равную одной сторонѣ, кои

противулежатъ равнымъ угламъ, а именно, DV равную GS, ибо онѣ суть половины равныхъ DE, BG: посему и прочія стороны
26,1. будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ: слѣдственно DT равна TG, и VT равна TS.

Итакъ, ежели параллелепипеда, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XL.

Ежели будутъ двѣ призмы равновысотныя; и основаніе одной параллелограммъ, а другой треугольникъ; и ежели параллелограммъ будетъ двукратный треугольника: то сіи призмы будутъ взаимно равныя.

Пусть будутъ ABCDEF, GHKLMN призмы равновысотныя; и пусть основаніе одной будетъ параллелограммъ AF, а другой треугольникъ GHK; и пусть будетъ параллелограммъ AF двукратный треугольника GHK. Говорю, что призма ABCDEF равна призмѣ GHKLMN.

Дополни параллелепипеды AO, GP.

Поелику параллелограммъ AF есть двукратный треугольника GHK; но и параллелограммъ HK есть двукратный треугольни-
34,1. ка GHK; то параллелограммъ AF равенъ параллелограмму HK. А параллелепипеды,

имѣющіе равныя основанія и туже высоту, суть взаимно равные*: посему параллелепипедъ AO равенъ параллелепипеду GP. Но половина параллелепипеда AO, есть призма ABCDEF, а половина параллелепипеда GP призма GHKLMN: чего ради и призма ABCDEF равна призмѣ GHKLMN. *31.

Итакъ, ежели будутъ двѣ, и пр. ч. и д. н.

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

КНИГА XII.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

Подобные многоугольники въ кругахъ, суть взаимно какъ квадраты изъ поперечниковъ.

Пусть будутъ ABCDE, FGHKL круги; и въ нихъ подобные многоугольники ABCDE, FKGHL; и пусть будутъ BM, GN поперечники круговъ. Говорю, что какъ квадратъ изъ BM къ квадрату изъ GN такъ многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL.

Протяни BE, AM, GL, FN.

Поелику многоугольникъ ABCDE подобенъ
оп. I, VI. многоугольнику FGHKL: то и уголъ BAE равенъ углу GFL; и какъ BA къ AE, такъ GF къ FL: Чего ради два треугольника BAE, GFL имѣютъ одинъ уголъ равный одному углу, а именно, уголъ BAE углу GFL, и стороны около равныхъ угловъ пропорціо-

нальныя; итакъ треугольникъ ABE есть равноугольный треугольнику FGL*; посему *6,VI.
уголъ AEB равенъ углу FLG. Но уголъ AEB равенъ и углу AMB*, ибо суть на тойже *21,III.
дугѣ; и такъ же уголъ FLG равенъ углу FNG: посему и уголъ AMB равенъ углу FNG.
А и прямой уголъ BAM* равенъ прямому *31,III.
GFN; посему и остальной уголъ равенъ остальному: итакъ треугольникъ ABM есть равноугольный треугольнику FGN: посему
какъ BM къ GN, такъ BA къ GF*. Но квадратъ *4,VI.
изъ BM къ квадрату изъ GN имѣетъ удвоенное отношенїе прямыя BM къ GN*; а *20,VI.
многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL имѣетъ удвоенное отношенїе прямыя BA къ GF: чего ради какъ квадратъ изъ BM къ квадрату изъ GN* такъ многоугольникъ ABCDE къ многоугольнику FGHKL. *11,V.

Итакъ подобные, и проч. ч. и д. н. (92).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ II.

Круги суть взаимно, какъ квадраты изъ поперечниковъ.

Пусть будутъ ABCD, EFGH круги; и BD, FH ихъ поперечники. Говорю, что какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ кругу EFGH.

Ибо, естьли не будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ кругу EFGH; то будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ нѣкоему пространству, или меньшему круга EFGH, или большему. Пусть, вопервыхъ, будетъ къ меньшему, пространству S.

6,IV. Въ кругѣ EFGH впиши квадратъ EFGH: То сей вписанный квадратъ будетъ больше половины круга EFGH. Ибо естьли чрезъ точки E, F, G, H проведемъ касательныя къ кругу; то опишемъ квадратъ, коего половина

47,I, и 31,III. есть квадратъ EFGH: но кругъ меньше квадрата описаннаго; посему вписанный квадратъ EFGH больше половины круга EFGH.

30,III. Раздѣли дуги EF, FG, GH, HE по поламъ въ точкахъ K, L, M, N; и протяни EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE: То каждый изъ треугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE есть больше половины отрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Ибо, естьли чрезъ точки K, L, M, N проведемъ касательныя къ кругу, и на параллельныхъ къ нимъ прямыхъ EF, FG, GH, HE, дополнимъ параллелограммы; то каждый изъ треугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE будетъ половина параллелограмма, въ коемъ онъ помѣщается: но отрѣзокъ меньше параллелограмма, въ коемъ онъ

помѣщается; слѣдственно каждый изъ треугольниковъ EKF, FLG, GMH, HNE больше половины отрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Естьли же и оставшїяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протягивать прямыя; и сїе всегда будемъ дѣлать; то останутся напослѣдокъ нѣкїе отрѣзки круга, кои будутъ меньше избытка круга EFGH предъ пространствомъ S. Ибо доказано въ первой ѳеоремѣ десятой книги, что изъ двухъ неравныхъ излагаемыхъ величинъ, естьли отъ большей отнято будетъ больше половины, и отъ оставшейся больше половины, и сїе всегда дѣлаемо будетъ: то останется напослѣдокъ нѣкая величина, которая будетъ меньше излагаемой меньшей величины. Итакъ пусть останутся; и пусть будутъ отрѣзки стоящїе на прямыхъ EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, тѣ самые, кои суть меньше избытка круга EFGH предъ пространствомъ S: посему остальной многоугольникъ EKFLGMHN есть больше пространства S. Въ кругѣ ABCD впиши многоугольникъ A O B P C Q D R подобный многоугольнику EKFLGMHN. Посему какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ и многоугольникъ AOBPCQDR къ многоугольнику EKFLGMHN*. *1.

Но какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ пространству S: посему какъ кругъ ABCD къ пространству S, такъ многоугольникъ AOBPCQDR къ много-
11,V. угольнику EKFLGMHN; и премѣненіемъ, какъ кругъ ABCD къ многоугольнику что въ немъ, такъ пространство S къ много-
16,V. угольнику EKFLGMHN. Но кругъ ABCD больше многоугольника что въ немъ; посему и пространство S больше многоугольника EKFLGMHN: Оно же и меньше; что невозможно. Посему не будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ нѣкоему пространству меньшему круга EFGH.

Подобно докажемъ, что не будетъ какъ квадратъ изъ FH къ квадрату изъ BD, такъ кругъ EFGH къ нѣкоему пространству меньшему круга ABCD.

Говорю же, что и не будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ нѣкоему пространству большему круга EFGH. Ибо, естьли возможно, пусть будетъ къ большему, пространству S. Посему премѣненіемъ, какъ квадратъ изъ FH къ квадрату изъ BD, такъ пространство S къ кругу ABCD. Но какъ пространство S къ кругу ABCD, такъ кругъ EFGH къ нѣкоему пространству

меньшему круга ABCD*: посему какъ квадратъ изъ FH къ квадрату изъ BD, такъ кругъ EFGH къ пространству меньшему круга ABCD; что, по доказанному уже, невозможно: а посему не будетъ какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ нѣкоему пространству большему круга EFGH. А доказано, что и ни къ меньшему: чего ради какъ квадратъ изъ BD къ квадрату изъ FH, такъ кругъ ABCD къ кругу EFGH. *лемма.

Итакъ круги суть, и проч. ч. и д. н.

Лемма. Естьли пространство S больше круга EFGH: то говорю, что какъ пространство S къ кругу ABCD, такъ кругъ EFGH къ нѣкоему пространству меньшему круга ABCD.

Ибо пусть будетъ какъ пространство S къ кругу ABCD, такъ кругъ EFGH къ пространству T. Говорю, что пространство T меньше круга ABCD. Поелику какъ пространство S къ кругу ABCD, такъ кругъ EFGH къ пространству T; то, премѣненіемъ, какъ пространство S къ кругу EFGH, такъ кругъ ABCD къ пространству T*. Но пространство S больше круга EFGH; посему и кругъ ABCD больше пространства T. *16, V.

Чего ради какъ пространство S къ кругу ABCD, такъ кругъ EFGH къ нѣкоему пространству меньшему круга ABCD. (93).

ПРЕДЛОЖЕНІЕ III.

Всякую пирамиду, имѣющую треугольное основаніе, можно раздѣлять: на двѣ, треугольныя же основанія имѣющія, пирамиды, кои суть взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой; и на двѣ призмы равныя: и сіи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды.

Пусть будетъ пирамида, коея основаніе треугольникъ ABC, а вершина точка D. Говорю, что пирамиду ABCD можно раздѣлить: на двѣ, имѣющія треугольныя же основанія, пирамиды, кои суть взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой; и на двѣ призмы равныя: и что сіи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды. (94).

Раздѣли AB, BC, CA, AD, DB, DC по поламъ въ точкахъ E, F, G, H, K, L; и протяни EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG.

Поелику AE равна EB, и AH равна HD:
2,VI. то EH параллельна къ DB. Потому же и HK параллельна къ AB. Итакъ HEBK есть

параллелограммъ: посему HK равна EB*. *34,I.
Но EB равна EA: посему и EA равна HK.
Поелику же и AH равна HD; то двѣ прямыя EA, AH равны двумъ прямымъ KH, HD, каждая каждой; и уголъ EAH равенъ углу KHD*: посему основанїе EH равно основанїю KD: а посему и треугольникъ AEH равенъ и подобенъ* треугольнику HKD. *29,I. *6и4,VI.
Потому же и треугольникъ AHG равенъ и подобенъ треугольнику HLD. И поелику двѣ прямыя EH, HG, взаимно встрѣчающїяся, параллельны къ двумъ прямымъ KD, DL, взаимно встрѣчающимся, и лежащимъ не на тойже плоскости: то содержатъ онѣ углы равные*: посему уголъ EHG равенъ углу KDL. *10,XI.
Итакъ, поелику двѣ прямыя EH, HG равны двумъ прямымъ KD, DL; каждая каждой; и уголъ EHG равенъ углу KDL: то основанїе EG равно основанїю KL; посему и треугольникъ EHG равенъ и подобенъ, треугольнику KDL. Потому же и треугольникъ AEG равенъ и подобенъ треугольнику HKL. Чего ради пирамида, коея основанїе треугольникъ AEG а вершина точка H, равна и подобна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ HKL а вершина точка D*. И поелику къ AB, одной изъ сторонъ треугольника ADB, проведена *оп.10,XI.

параллельная HK: то треугольникъ ADB
29,I. есть равноугольный треугольнику DHK;
4.VI. и стороны ихъ суть пропорціональныя: чего ради треугольникъ ADB подобенъ треугольнику DHK. Потому же треугольникъ DBC подобенъ треугольнику DKL; и треугольникъ ADC подобенъ треугольнику DLH. И поелику двѣ прямыя BA, AC, взаимно встрѣчающіяся, параллельны къ двумъ прямымъ KH, HL, взаимно встрѣчающимся, и лежащимъ не на тойже плоско-
10,XI. сти; то онѣ содержатъ углы равные: посему уголъ BAC равенъ углу KHL. Но какъ BA къ AC, такъ KH къ LH; посему треугольникъ ABC подобенъ треугольнику
6,VI. HKL. Итакъ пирамида, коея основаніе треугольникъ ABC а вершина точка D, подобна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ HKL а вершина точка D. Доказано же, что пирамида, коея основаніе треугольникъ HKL а вершина точка D, подобна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ AEG а вершина точка H: посему и пирамида, коея основаніе треугольникъ ABC а вершина точка D, подобна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ AEG а вершина точка H. Чего ради каждая изъ пирамидъ AEGH, HKLD подобна цѣлой

пирамидѣ ABCD. И поелику BF равна FC, то параллелограммъ EBFG есть двукратный треугольника GFC*. Но ежели будутъ *41,I. двѣ призмы равновысотныя, изъ коихъ основанїе одной параллелограммъ, а другой треугольникъ, и ежели параллелограммъ есть двукратный треугольника; то сїи призмы взаимно равны*: посему *40,XI. призма, содержимая двумя треугольниками BKF, EHG и тремя параллелограммами EBFG, EBKH, HKFG, равна призмѣ, содержимой двумя треугольниками GFC, HKL и тремя параллелограммами KFCL, LCGH, HKFG. Явствуетъ же, что каждая изъ сихъ призмъ: и та, коея основанїе параллелограммъ EBFG противулежащїй прямой HK, и та, коея основанїе треугольникъ GFC противулежащїй треугольнику KLH, есть больше каждой изъ пирамидъ, коихъ основанїя суть треугольники AEG, HKL, а вершины точки H, D. Ибо, ежели протянемъ прямыя EF, EK; то призма, коея основанїе параллелограммъ EBFG противулежащїй прямой HK, есть больше пирамиды, коея основанїе треугольникъ EBF а вершина точка K. Но пирамида, коея основанїе треугольникъ EBF а вершина точка K, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ AEG а вершина

оп.10,XI. точка H; ибо онѣ содержатся плоскостями равными и подобными: посему призма, коея основанїе параллелограммъ EBFG противулежащїй прямой HK, есть больше пирамиды, коея основанїе треугольникъ AEG а вершина точка H. Но призма, коея основанїе параллелограммъ EBFG противулежащїй прямой HK, равна призмѣ, коея основанїе треугольникъ GFC противулежащїй треугольнику HKL; а пирамида, коея основанїе треугольникъ AEG а вершина точка H, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ HKL а вершина точка D: посему двѣ сказанныя призмы суть больше двухъ пирамидъ, коихъ основанїя треугольники AEG, HKL, а вершины точки H, D. Итакъ цѣлая пирамида, коея основанїе треугольникъ ABC а вершина точка D, раздѣлена на двѣ пирамиды, кои взаимно равны и подобны, и еще подобны цѣлой пирамидѣ, и на двѣ призмы равныя; и сїи двѣ призмы суть больше половины цѣлой пирамиды. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IV.

Ежели будутъ двѣ пирамиды, имѣющїя туже высоту и треугольныя основанїя;

раздѣлена же будетъ каждая изъ нихъ на двѣ пирамиды равныя взаимно и подобныя цѣлой, и на двѣ призмы равныя; естьли же и изъ сихъ произшедшихъ пирамидъ каждая будетъ раздѣлена такимъ же образомъ; сїе же и всегда будетъ дѣлаемо: то будетъ какъ основанїе одной пирамиды къ основанїю другой, такъ всѣ призмы въ одной пирамидѣ, ко всѣмъ призмамъ равномногимъ въ другой пирамидѣ.

Пусть будутъ двѣ пирамиды, имѣющїя туже высоту, и треугольныя основанїя ABC, DEF, а вершины точки G, H; и пусть каждая изъ нихъ будетъ раздѣлена на двѣ пирамиды взаимно равныя и подобныя цѣлой, и на двѣ равныя призмы*; и вообрази, *3.
что каждая изъ сихъ произшедшихъ пирамидъ раздѣлена такимъ же образомъ; сїе же и всегда пусть будетъ дѣлаемо. Говорю, что какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ всѣ призмы въ пирамидѣ ABCG ко всѣмъ призмамъ равномногимъ въ пирамидѣ DEFH.

Поелику BO равна OC, и AL равна LC, то AB параллельна къ OL*: посему тре- *2,VI.
угольникъ ABC подобенъ треугольнику LOC*. *4,VI.
Потому же и треугольникъ DEF подобенъ треугольнику RVF. И поелику прямая

BC есть двукратная прямой CO, и EF двукратная прямой FV; то какъ BC къ CO, такъ EF къ FV. Но изъ BC, CO написаны подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры ABC, LOC; а изъ EF, FV подобныя и подобно положенныя прямолинейныя фигуры DEF, RFV: посему какъ треугольникъ ABC къ треугольнику LOC, такъ треугольникъ DEF къ тре-
22,VI. угольнику RVF; и премѣненіемъ, какъ треугольникъ ABC къ треугольнику DEF, такъ треугольникъ LOC къ треугольнику
16,V. RFV. Но какъ треугольникъ LOC къ треугольнику RFV, такъ призма, коея основаніе треугольникъ LOC противулежащій треугольнику PMN, къ призмѣ, коея основаніе треугольникъ RVF противулежащій
лемма. треугольнику STU: посему и какъ треугольникъ ABC къ треугольнику DEF, такъ призма, коея основаніе треугольникъ LOC противулежащій треугольнику PMN, къ призмѣ, коея основаніе треугольникъ RVF
11,V. противулежащій треугольнику STU. И поелику двѣ призмы въ пирамидѣ ABCG суть взаимно равны; а и двѣ призмы въ пирамидѣ DEFH взаимно равны: то какъ призма, коея основаніе параллелограммъ KLOB противулежащій прямой MP, къ приз-

мѣ, коея основанїе треугольникъ LOC противулежащїй треугольнику PMN, такъ призма, коея основанїе параллелограммъ EQRV противулежащїй прямой SU, къ призмѣ, коея основанїе треугольникъ RVF противулежащїй треугольнику STU; и совокупленїемъ, какъ призмы KBOLMP, LOCMNP къ призмѣ LOCMNP, такъ призмы QEVRSU, RVFSTU къ призмѣ RVFSTU*; и премѣненїемъ, какъ призмы KBOLMP, LOCPMN къ призмамъ QEVRSU, RVFSTU, такъ призма LOCMNP къ призмѣ RVFSTU*. Но доказано, что какъ призма LOCMNP къ призмѣ RVFSTU, такъ основанїе LOC къ основанїю RVF, и такъ основанїе ABC къ основанїе DEF: посему какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ двѣ призмы въ пирамидѣ ABCG къ двумъ призмамъ въ пирамидѣ DEFH. Естьли каждую изъ произшедшихъ пирамидъ PMNG,SUTH раздѣлимъ такимъ же образомъ: то будетъ, какъ основанїе PMN къ основанїю SUT, такъ двѣ призмы въ пирамидѣ PMNG къ двумъ призмамъ въ пирамидѣ SUTH. Но какъ основанїе PMN къ основанїю SUT, такъ основанїе ABC къ основанїю DEF: посему какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ двѣ призмы въ пирамидѣ ABCG къ двумъ призмамъ въ пирамидѣ DEFH,

*18.V.

*16,V.

и такъ двѣ призмы въ пирамидѣ PMNG къ двумъ призмамъ въ пирамидѣ SUTH, и такъ всѣ четыре ко всѣмъ четыремъ. Сїе же докажется и о призмахъ, кои произойдутъ отъ раздѣленїя пирамидъ AKLP, DQRS, и вообще о всѣхъ призмахъ равномногихъ.

Лемма. Мы докажемъ слѣдующимъ образомъ, что какъ треугольникъ LOC къ треугольнику RVF, такъ призма, коея основанїе треугольникъ LOC противулежащїй треугольнику PMN, къ призмѣ, коея основанїе треугольникъ RVF противулежащїй треугольнику STU.

Вообрази, что въ тѣхъ же фигурахъ отъ точекъ G, H проведены перпендикляруныя прямыя къ плоскостямъ треугольниковъ ABC, DEF: то сїи прямыя будутъ равныя, ибо пирамиды предполагаются равновысотными. Поелику же и прямая GC и перпендикулярная прямая отъ точки G проведенная, разсѣчены параллельными плоскостями ABC, PMN: то онѣ разсѣкаются про-
17, XI. порцїонально. Но прямая GC разсѣчена по поламъ въ N плоскостїю PMN: посему и проведенная отъ точки G перпендикулярная прямая къ плоскости ABC, разсѣчена по поламъ плоскостїю PMN. Потому же и

проведенная отъ точки H перпендикулярная къ плоскости DEF, разсѣчена по поламъ плоскостію STU. Но проведенныя отъ G, H перпендикулярныя къ плоскостямъ ABC, DEF суть взаимно равны; посему и проведенныя отъ треугольниковъ PMN, STU перпендикулярныя къ треугольникамъ ABC, DEF взаимно равны; а посему и призмы, имѣющія основаніями треугольники LOC, RVF противулежащіе треугольникамъ PMN, STU, суть равновысотныя: слѣдственно параллелепипеды дописанные изъ сказанныхъ призмъ, будучи равновысотные, суть взаимно какъ основанія*; чего ради и половины *32,XI.
суть какъ половины, то есть: основанія LOC, RVF суть взаимно какъ сказанныя призмы. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ V.

Пирамиды, имѣющія треугольныя основанія и туже высоту, суть взаимно какъ основанія.

Пирамиды, коихъ основанія треугольники ABC, DEF, а вершины точки G, H, пусть будутъ имѣть туже высоту. Говорю, что какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFH.

Ибо, естьли не будетъ какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFH; то будетъ какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ пирамида ABCG къ нѣкоему тѣлу, или меньшему пирамиды DEFH, или большему. Пусть, вопервыхъ, будетъ къ меньшему, тѣлу X.

Раздѣли пирамиду DEFH на двѣ пирамиды взаимно равныя и подобныя цѣлой, и на
3. двѣ равныя призмы: то сїи двѣ призмы
3. суть больше половыны цѣлой пирамыды. И еще, пирамиды произшедшїя отъ сего раздѣленїя, раздѣли такимъ же образомъ; сїе же и всегда пусть будетъ дѣлаемо, пока отнимутся нѣкїя пирамиды отъ пирамиды DEFH, кои будутъ меньше избытка пи-
1,X. рамиды DEFH предъ тѣломъ X. Пусть отнимутся; и пусть онѣ будутъ, на примѣръ, пирамиды DQRS, STUH: то остальныя призмы въ пирамидѣ DEFH суть больше тѣла X. Раздѣли же и пирамиду ABCG такимъ же образомъ, такъ чтобъ призмы въ оной были равномногїя призмамъ въ пирамидѣ DEFH.

Посему какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ призмы въ пирамидѣ ABCG
4. къ призмамъ въ пирамидѣ DEFH. Но какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ,

по положенію, пирамида ABCG къ тѣлу X: посему какъ пирамида ABCG къ тѣлу X, такъ призмы въ пирамидѣ ABCG къ призмамъ въ пирамидѣ DEFH*; и премѣненіемъ, какъ пирамида ABCG къ призмамъ, кои въ ней, такъ тѣло X къ призмамъ въ пирамидѣ DEFH*. Но пирамида ABCG больше призмъ, кои въ ней; посему и тѣло X больше призмъ, кои въ пирамидѣ DEFH: Оно же и меньше; что невозможно. Чего ради не будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCG къ нѣкоему тѣлу меньшему пирамиды DEFH.

*11, V.

*16, V.

Подобно докажемъ, что не будетъ какъ основаніе DEF къ основанію ABC, такъ пирамида DEFH къ нѣкоему тѣлу меньшему пирамиды ABCG.

Говорю же, что и не будетъ какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ пирамида ABCH къ нѣкоему тѣлу большему пирамиды DEFH. Ибо, естьли возможно, пусть будетъ къ большему, тѣлу X. Посему, преложеніемъ*, какъ основаніе DEF къ основанію ABC, такъ тѣло X къ пирамидѣ ABCG. Но какъ тѣло X къ пирамидѣ ABCG, такъ пирамида DEFH къ нѣкоему тѣлу меньшему пирамиды ABCG, по доказанному предъ симъ: посему какъ основаніе DEF къ основанію

*оп. 14, V.

ABC, такъ пирамида DEFH къ нѣкоему тѣлу меньшему пирамиды ABCG; что, по доказанному, нелѣпо: посему не будетъ какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ пирамида ABCG къ нѣкоему тѣлу большему пирамиды DEFH. А доказано, что и ни къ меньшему: чего ради какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFH.

Итакъ пирамиды, имѣющїя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VI.

Пирамиды, имѣющїя туже высоту и многоугольныя основанїя, суть взаимно какъ основанїя.

Пирамиды, коихъ основанїя многоугольники ABCDE, FGHKL, а вершины точки M, N, пусть будутъ имѣть туже высоту. Говорю, что какъ основанїе ABCDE къ основанїю FGHKL, такъ пирамида ABCDEM къ пирамидѣ FGHKLN.

Раздѣли основанїе ABCDE на треугольники, ABC, ACD, ADE; и основанїе FGHKL на треугольники FGH, FHK, FKL; и вообрази на каждомъ изъ сихъ треугольниковъ пирамиды равновысотныя цѣлымъ пирамидамъ.

Поелику какъ треугольникъ ABC къ треугольнику ACD, такъ пирамида ABCM къ пирамидѣ ACDM*: то, совокупленіемъ, какъ *5.
трапеція ABCD къ треугольнику ACD, такъ пирамида ABCDM къ пирамидѣ ACDM*. Но *18, V.
какъ треугольникъ ACD къ треугольнику ADE, такъ пирамида ACDM къ пирамидѣ ADEM*: посему, равномѣстно, какъ основаніе ABCD къ основанію ADE, такъ пирамида *5.
ABCDM къ пирамидѣ ADEM*; а посему, совокупленіемъ, какъ основаніе ABCDE къ основанію ADE, такъ пирамида ABCDEM къ *22, V.
пирамидѣ ADEM. Потому же, какъ основаніе FGHKL къ основанію FKL, такъ пирамида FGHKLN къ пирамидѣ FKLN. И поелику двѣ пирамиды ADEM, FKLN имѣютъ треугольныя основанія и туже высоту: то какъ основаніе ADE къ основанію FKL, такъ пирамида ADEM къ пирамидѣ FKLN*. Итакъ, *5.
поелику какъ основаніе ABCDE къ основанію ADE, такъ пирамида ABCDEM къ пирамидѣ ADEM; и какъ основаніе ADE къ основанію FKL, такъ пирамида ADEM къ пирамидѣ FKLN: то, равномѣстно, какъ основаніе ABCDE къ основанію FKL, такъ пирамида ABCDEM къ пирамидѣ FKLN*. Но какъ основаніе FKL къ *22, V.
основанію FGHKL, такъ пирамида FKLN къ пирамидѣ FGHKLN: посему, равномѣстно,

какъ основанїе ABCDE къ основанїю FGHKL, такъ пирамида ABCDEM къ пирамидѣ FGHKLN.

Итакъ пирамиды, имѣющїя, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VII.

Всякую призму, имѣющую треугольное основанїе, раздѣлять можно на три пирамиды равныя взаимно, имѣющїя треугольныя основанїя.

Пусть будетъ призма, коея основанїе треугольникъ ABC противулежащїй треугольнику DEF. Говорю, что призму ABCDEF раздѣлить можно на три пирамиды равныя взаимно, имѣющїя треугольныя основанїя.

Протяни BD, EC, CD.

опр.13,XI. Поелику ABED есть параллелограммъ, а BD его поперечникъ; то треугольникъ
34,I. ABD равенъ треугольнику EDB: посему пирамида, коея основанїе треугольникъ ABD а вершина точка C, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ EDB и вершина
5. точка C. Но пирамида, коея основанїе треугольникъ EDB а вершина точка C, есть таже что и пирамида, коея основанїе
оп.10,XI. треугольникъ EBC а вершина точка D; ибо

онѣ содержатся тѣмиже плоскостями: посему и пирамида, коея основанїе треугольникъ ABD а вершина точка C, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ EBC а вершина точка D. Еще же, поелику FCBE есть параллелограммъ*, а CE его попереч- *опр. 13, XI.
никъ; то треугольникъ ECF равенъ треугольнику CBE: посему пирамида, коея основанїе треугольникъ BEC а вершина точка D, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ ECF и вершина точка D*. А до- *5.
казано, что пирамида, коея основанїе треугольникъ BCE а вершина точка D, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ ABD а вершина точка C: посему и пирамида, коея основанїе треугольникъ CEF а вершина точка D, равна пирамидѣ, коея основанїе треугольникъ ABD а вершина точка C. Итакъ призма ABCDEF раздѣлена на три пирамиды равныя взаимно, имѣющїя треугольныя основанїя. И поелику пирамида, коея основанїе треугольникъ ABD а вершина точка C, есть таже что и пирамида, коея основанїе треугольникъ CAB а вершина точка D*, ибо онѣ содержатся тѣмиже плос- *оп. 10, XI.
костями; пирамида же, коея основанїе треугольникъ ABD а вершина точка C, есть, по доказанному, третья часть призмы,

коея основанїе треугольникъ ABC противулежащїй треугольнику DEF: чего ради и пирамида, коея основанїе треугольникъ ABC а вершина точка D, есть третья часть призмы, имѣющей тоже основанїе, то есть треугольникъ ABC противулежащїй треугольнику DEF. ч. и д. н.

Слѣдствїе. Отсюда явствуетъ, что всякая пирамида есть третья часть призмы, имѣющей тоже основанїе и одинакую высоту. Ибо, естьли основанїе призмы будетъ и другая какая либо прямолинейная фигура, то и противулежащая основанїю будетъ ей
оп.13,XI. равная и подобная; и сїю призму можно раздѣлить на призмы, имѣющїя треугольныя основанїя и противулежащїя треугольникамъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ VIII.

Подобныя пирамиды, имѣющїя треугольныя основанїя, суть взаимно въ утроенномъ отношенїи сходственныхъ сторонъ.

Пусть будутъ подобныя и подобно положенныя пирамиды, коихъ основанїя суть треугольники ABC, DEF, а вершины точки G, H. Говорю, что пирамида ABCG къ пи-

рамидѣ DEFH имѣетъ утроенное отношенiе прямыя BC къ EF.

Дополни параллелепипеды BGML, EHQP.

Поелику пирамида ABCG подобна пирамидѣ DEFH: то* уголъ ABC равенъ углу DEF, и уголъ GBC углу HEF, а уголъ ABG углу DEH; и какъ AB къ DE, такъ BC къ EF, и такъ BG къ EH. Итакъ, поелику какъ AB къ DE, такъ BC къ EF, и сiи пропорцiональныя стороны суть около равныхъ угловъ: то параллелограммъ BM подобенъ параллелограмму EQ. Потому же параллелограммъ BN подобенъ параллелограмму ER, и параллелограммъ BK параллелограмму EO. Чего ради три параллелограмма BM, BK, BN подобны тремъ параллелограммамъ EQ, EO, ER. Но три параллелограмма MB, BK, BN равны* и подобны тремъ прочимъ противулежащимъ; а и три параллелограмма EQ, EO, ER равны и подобны тремъ прочимъ противулежащимъ: итакъ параллелепипеды BGML, EHQP содержатся плоскостями подобными и равномногими: а посему параллелепипедъ BGML подобенъ параллелепипеду EHQP*. Но подобные параллелепипеды суть взаимно въ утроенномъ отношенiи сходственныхъ сторонъ*: посему параллелепипедъ BGML къ па-

*оп. 9, XI.

*24, XI.

*оп. 9, XI.

*33, XI.

раллелепипеду EHQP имѣетъ утроенное отношенiе, сходственной стороны BC къ сходственной сторонѣ EF. Но какъ параллелепипедъ BGML къ параллелепипеду EHQP, такъ пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFH; ибо пирамида есть шестая часть параллелепипеда, потому что призма, то есть половина параллелепипеда, есть трекратная
7. пирамиды: посему пирамида ABCG къ пирамидѣ DEFH имѣетъ утроенное отношенiе прямыя BC къ EF. ч. и д. н.

Слѣдствiе. Изъ сего явствуетъ, что подобныя пирамиды, имѣющiя многоугольныя основанiя, суть взаимно въ утроенномъ отношенiи сходственныхъ сторонъ. Ибо сiи пирамиды можно раздѣлить на пирамиды, имѣющiя треугольныя основанiя; потому что основанiя, кои суть
оп.13,XI. подобные многоугольники, можно раздѣлить на треугольники равномногiе, взаимно подобные, и пропорцiональные симъ
20,VI. многоугольникамъ. Посему какъ одна изъ имѣющихъ треугольное основанiе пирамидъ, кои въ первой пирамидѣ, къ одной изъ имѣющихъ треугольное основанiе пирамидъ, кои во второй пирамидѣ, такъ всѣ имѣющiя треугольное основанiе пирамиды, кои въ

первой, ко всѣмъ имѣющимъ треугольное основанїе пирамидамъ, кои во второй*, то *12,V.
есть, такъ первая изъ пирамидъ имѣющихъ многоугольное основанїе, ко второй изъ пирамидъ имѣющихъ многоугольное же основанїе. Но тѣ пирамиды, то есть имѣющїя треугольныя основанїя, суть взаимно въ утроенномъ отношенїи сходственныхъ сторонъ: чего ради и сїи пирамиды, то есть имѣющїя многоугольныя основанїя, суть взаимно въ утроенномъ отношенїи сходственныхъ сторонъ*. (95). *11,V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ IX.

Равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основанїя треугольныя, основанїя суть обратно пропорцїональны высотамъ: И которыхъ пирамидъ, имѣющихъ основанїя треугольныя, основанїя обратно пропорцїональны высотамъ, тѣ суть равныя.

Пусть будутъ равныя пирамиды, имѣющїя треугольныя основанїя ABC, DEF, а вершины точки G, H. Говорю, что пирамидъ ABCG, DEFH основанїя суть обратно пропорцїональны высотамъ; то есть, какъ основанїе ABC къ основанїю DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG.

Дополни параллелепипеды BGML, EHQP.

Поелику пирамида ABCG равна пирамидѣ DEFH; а параллелепипедъ BGML есть шестикратный пирамиды ABCG*, и параллелепипедъ EHQP шестикратный же пирамиды DEFH: то параллелепипедъ BGML равенъ параллелепипеду EHQP. А равныхъ параллелепипедовъ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ*: посему какъ основаніе BM къ основанію EQ, такъ высота параллелепипеда EHQP къ высотѣ параллелепипеда BGML. Но какъ основаніе BM къ основанію EQ, такъ треугольникъ ABC къ треугольнику DEF*: посему какъ треугольникъ ABC къ треугольнику DEF, такъ высота параллелепипеда EHQP къ высотѣ параллелепипеда BGML*. Но высота параллелепипеда EHQP есть таже что и пирамиды DEFH, а высота параллелепипеда BGML таже что и пирамиды ABCG: посему какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG. И такъ пирамидъ ABCG, DEFH основанія суть обратно пропорціональны высотамъ.

*въ 8.

*34, XI.

*15, V.

*11, V.

Но пусть будутъ пирамидъ ABCG, DEFH основанія обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABC

къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG. Говорю, что пирамида ABCG равна пирамидѣ DEFH.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, поелику какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG; а какъ основаніе ABC къ основанію DEF, такъ параллелограммъ BM къ параллелограмму EQ: то какъ параллелограммъ BM къ параллелограмму EQ, такъ высота пирамиды DEFH къ высотѣ пирамиды ABCG. Но высота пирамиды DEFH есть таже что и параллелепипеда EHQP, а высота пирамиды ABCG таже что и параллелепипеда BGML: посему какъ основаніе BM къ основанію EQ, такъ высота параллелепипеда EHQP къ высотѣ параллелепипеда BGML. А которыхъ параллелепипедовъ, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные*: посему параллелепипедъ BGML равенъ параллелепипеду EHQP. Но пирамида ABCG есть шестая часть параллелепипеда BGML, а пирамида DEFH шестая же часть параллелепипеда EHQP: чего ради пирамида ABCG равна пирамидѣ DEFH. *34, XI.

Итакъ равныхъ, и проч. ч. и д. н. (96).

* *

ПРЕДЛОЖЕНІЕ X.

Всякій конусъ есть третья часть цилиндра, имѣющаго тоже основаніе и равную высоту.

Пусть имѣютъ конусъ и цилиндръ тоже основаніе, кругъ ABCD, и равную высоту. Говорю, что конусъ есть третья часть цилиндра; то есть, цилиндръ есть трекратный конуса.

Ибо, буде цилиндръ не есть трекратный конуса; то онъ будетъ, или больше или меньше нежели трекратный конуса. Пусть, вопервыхъ, будетъ больше нежели трекратный.

6,IV. Въ кругѣ ABCD впиши квадратъ ABCD: то квадратъ ABCD больше половины круга ABCD. На квадратѣ ABCD возставь призму, равновысотную цилиндру: то сія призма будетъ больше половины цилиндра. Ибо, естьли около круга ABCD опишемъ квадратъ; то квадратъ вписанный будетъ половина квадрата описаннаго: И естьли воставимъ на нихъ призмы равновысотныя, то суть параллелепипеды; а параллелепипеды, имѣющіе туже высоту, суть взаимно какъ
32,XI. основанія: посему призма, возставленная на квадратѣ ABCD, есть половина призмы,

возставленной на квадратѣ описанномъ около круга ABCD: Но цилиндръ есть меньше призмы, возставленной на квадратѣ описанномъ около круга ABCD: слѣдственно призма, возставленная на квадратѣ ABCD и равновысотная цилиндру, есть больше половины цилиндра. Раздѣли дуги AB, BC, CD, DA по поламъ въ точкахъ E, F, G, H; и протяни AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA: то каждый изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DHA больше половины отрѣзка круговаго, въ коемъ онъ помѣщенъ, какъ доказано выше*. На каждомъ изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DHA возставь призмы равновысотныя цилиндру; то каждая изъ сихъ призмъ больше половины объемлющаго оную отрѣзка цилиндра. Ибо, естьли чрезъ точки E, F, G, H проведемъ параллельныя прямыя къ AB, BC, CD, DA, и на AB, BC, CD, DA дополнимъ параллелограммы, и на нихъ возставимъ параллелепипеды равновысотные цилиндру, то призмы, кои на треугольникахъ AEB, BFC, CGD, DHA, будутъ половины каждаго изъ сихъ параллелепипедовъ: Но отрѣзки цилиндра суть меньше сихъ же параллелепипедовъ: посему призмы, кои на треугольникахъ AEB, BFC, CGD, DHA, суть больше половины

*въ 2.

соотвѣтствующихъ отрѣзковъ цилиндра. Естьли же и оставшїяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протягивать прямыя, и на произшедшихъ треугольникахъ возставлять призмы равновысотныя цилиндру; и естьли сїе всегда будемъ дѣлать: то останутся наконецъ нѣкїе отрѣзки цилиндра, кои будутъ меньше избытка цилиндра предъ
1,X. трекратнымъ конусомъ. Пусть таковые останутся: и пусть сїи отрѣзки цилиндра будутъ « на » AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Посему остальная призма, коея основанїе многоугольникъ AEBFCGDH а высота таже что и цилиндра, больше трекратнаго конуса. Но призма, коея основанїе многоугольникъ AEBFCGDH, а высота таже что и цилиндра, есть трекратная пирамиды, коея основанїе многоугольникъ AEBFCGDH
7. а вершина таже что и конуса; посему и пирамида, коея основанїе многоугольникъ AEBFCGDH а вершина та же что и конуса, больше конуса имѣющаго основанїемъ кругъ ABCD: Она же и меньше, ибо конусомъ объемлется: что невозможно. Чего ради цилиндръ не больше нежели трекратный конуса.

Говорю же, что и ни меньше нежели трекратный. Ибо, естьли возможно, пусть

цилиндръ будетъ меньше нежели трекратный конуса: посему обратно конусъ есть больше нежели третья часть цилиндра.

Въ кругѣ ABCD впиши квадратъ ABCD: то квадратъ ABCD больше половины круга ABCD. На квадратѣ ABCD возставь пирамиду, имѣющую туже вершину что и конусъ: то сія пирамида будетъ больше половины конуса. Ибо, по доказанному уже, естьли опишемъ около круга ABCD квадратъ; то квадратъ ABCD есть половина квадрата описаннаго около сего круга. И естьли на сихъ квадратахъ возставимъ параллелепипеды, то есть призмы, равновысотныя конусу; то возставленная на квадратѣ ABCD будетъ половина возставленной на квадратѣ описанномъ около круга, ибо сіи параллелепипеды суть взаимно какъ основанія: А и третія ихъ части суть взаимно какъ основанія; чего ради пирамида, коея основаніе квадратъ ABCD, есть половина пирамиды, возставленной на квадратѣ описанномъ около круга: Но пирамида, возставленная на квадратѣ описанномъ около круга, больше конуса, ибо оный объемлетъ; слѣдственно и пирамида, коея основаніе квадратъ ABCD а вершина таже что и конуса, есть больше половины конуса. Раздѣли дуги AB, BC, CD, DA

по поламъ въ точкахъ E, F, G, H; и протяни AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA: то каждый изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DHA больше половины отрѣзка, въ коемъ помѣщается. Возставь на каждомъ изъ треугольниковъ AEB, BFC, CGD, DHA пирамиды, имѣющія туже вершину что и конусъ: то каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины отрѣзка конуса объемлющаго оную. Естьли же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протягивать прямыя, и на произшедшихъ треугольникахъ возставлять пирамиды, имѣющія туже вершину что и конусъ; и естьли сіе всегда будемъ дѣлать: то останутся наконецъ нѣкіе отрѣзки конуса, кои будутъ меньше избытка
1,X. конуса предъ третьею частію цилиндра. Пусть таковые останутся; и пусть сіи отрѣзки цилиндра будутъ тѣ, кои на отрѣзкахъ AE, EB, BF, FC. CG, GD, DH, HA. Посему остальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ AEBFCGDH а вершина таже что и конуса, есть больше нежели третья часть цилиндра. Но пирамида, коея основаніе многоугольникъ AEBFCGDH а вершина таже что и конуса, есть третья часть призмы, коея основаніе многоугольникъ AEBFCGDH, а вер-
7. шина таже что и цилиндра: посему призма,

коея основанїе многоугольникъ AEBFCGDH а высота тажѐ что и цилиндра, есть больше цилиндра, коего основанїе кругъ ABCD: Она же и меньше цилиндра, ибо цилиндромъ объемлется; что невозможно. Чего ради цилиндръ не меньше нежели трекратный конуса. А доказано, что и ни больше нежели трекратный: посему цилиндръ есть трекратный конуса; и слѣдовательно конусъ есть третья часть цилиндра.

Итакъ всякїй конусъ есть, и пр. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XI.

Конусы и цилиндры, имѣющїе туже высоту, суть взаимно какъ основанїя.

Пусть конусы и цилиндры, коихъ основанїя суть круги ABCD, EFGH, а оси KL, MN, и основанїй поперечники AC, EG, имѣютъ туже высоту. Говорю, что какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ конусу EN.

Ибо, естьли не такъ; то будетъ какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ нѣкоему тѣлу, или меньшему конуса EN, или большему. Пусть будетъ, вопервыхъ, къ меньшему, тѣлу O; и пусть будетъ

избытокъ конуса EN предъ тѣломъ O равенъ тѣлу Y: посему конусъ EN равенъ тѣламъ O, Y.

6,IV. Въ кругѣ EFGH впиши квадратъ EFGH; то сей квадратъ больше половины круга. На квадратѣ EFGH возставь пирамиду равновысотную конусу: то сія пирамида больше половины конуса. Ибо, естьли опишемъ около круга EFGH квадратъ, и естьли на семъ квадратѣ возставимъ пирамиду такожъ равновысотную конусу; то пирамида вписаная будетъ половина пирамиды описанной, ибо онѣ суть взаимно какъ основанія*: Но конусъ меньше пирамиды описанной; посему пирамида, коея основаніе квадратъ EFGH а вершина таже что и конуса, есть больше половины конуса. Раздѣли дуги EF, FG, GH, HE по поламъ въ точкахъ P, Q, R, S; и протяни HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH: то каждый изъ треугольниковъ HPE, EQF, FRG, GSH есть больше половины отрѣзка, въ коемъ онъ помѣщается. Возставь на каждомъ изъ треугольниковъ HPE, EQF, FRG, GSH пирамиды равновысотныя конусу: то каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины отрѣзка конуса объемлющаго оную. Естьли же и оставшіяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протя-

*6.

тивать прямыя, и на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возставлять пирамиды равновысотныя конусу; и естьли сїе всегда будемъ дѣлать: то останутся наконецъ нѣкїе отрѣзки конуса, кои будутъ меньше тѣла Y*. Пусть таковые остануться; и пусть сїи отрѣзки конуса будутъ тѣ, кои на отрѣзкахъ круга HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH. Посему остальная пирамида, коея основанїе многоугольникъ HPEQFRGS а высота таже что и конуса, есть больше тѣла O. Въ кругѣ ABCD впиши многоугольникъ DTAUBVCX подобный многоугольнику HPEQFRGS и подобно положенный; и на многоугольникѣ DTAUBVCX возставь пирамиду равновысотную конусу AL. *1,X.

Поелику какъ квадратъ изъ AC къ квадрату изъ EG, такъ многоугольникъ DTAUBVCX къ многоугольнику HPEQFRGS*; и какъ квадратъ изъ AC къ квадрату изъ EG, такъ кругъ ABCD къ кругу EFGH*: то какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ многоугольникъ DTAUBVCX къ многоугольнику HPEQFRGS*. Но какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ тѣлу O; а какъ многоугольникъ DTAUBVCX къ многоугольнику HPEQFRGS, такъ пирамида, *10,VI. и 1,XII. *2. *11,V.

коея основанїе многоугольникъ DTAUBVCX а вершина точка L, къ пирамидѣ, коея основанїе многоугольникъ HPEQFRGS а вершина точка N: посему какъ конусъ AL къ тѣлу O, такъ пирамида, коея основанїе многоугольникъ DTAUBVCX а вершина точка L, къ пирамидѣ, коея основанїе многоугольникъ HPEQFRGS а вершина точка N: а посему премѣненїемъ, какъ конусъ AL къ пирамидѣ что въ немъ, такъ тѣло O къ пирамидѣ что въ конусѣ EN. Но конусъ AL больше пирамиды что въ немъ; посему тѣло O больше пирамиды что въ конусѣ EN: Оно же и меньше; что нелѣпо. Чего ради не будетъ какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ нѣкоему тѣлу меньшему конуса EN.

Подобно докажемъ, что ни какъ кругъ EFGH къ кругу ABCD, такъ конусъ EN къ нѣкоему тѣлу меньшему конуса AL.

Говорю же, что и не будетъ какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ нѣкоему тѣлу большему конуса EN. Ибо, естьли возможно, пусть будетъ къ большему, тѣлу O. Посему премѣненїемъ, какъ кругъ EFGH къ кругу ABCD, такъ тѣло O къ конусу AL. Но какъ тѣло O къ конусу AL,

такъ конусъ EN къ нѣкоему тѣлу меньшему конуса AL: посему какъ кругъ EFGH къ кругу ABCD, такъ конусъ EN къ тѣлу меньшему конуса AL; что, по доказанному уже, невозможно. Посему не будетъ какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ нѣкоему тѣлу большему конуса EN. А доказано, что и ни къ меньшему: Чего ради какъ кругъ ABCD къ кругу EFGH, такъ конусъ AL къ конусу EN.

Но какъ конусъ къ конусу, такъ цилиндръ къ цилиндру, ибо каждый каждаго есть трекратный*: посему круги ABCD, *10.
EFGH суть взаимно какъ цилиндры на нихъ равновысотные конусамъ.

Итакъ конусы и цилиндры, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XII.

Подобные конусы и цилиндры суть взаимно въ утроенномъ отношеніи поперечниковъ основаній.

Пусть будутъ подобные конусы и цилиндры, коихъ основанія круги ABCD, EFGH, поперечники же основаній BD, FH, а KL, MN оси конусовъ и цилиндровъ. Говорю, что конусъ, коего основаніе кругъ ABCD а вер-

шина точка L, къ конусу, коего основанїе кругъ EFGH а вершина точка N, имѣетъ утроенное отношенїе прямыя BD къ FH.

Ибо, буде не имѣетъ конусъ ABCDL къ конусу EFGHN утроеннаго отношенїя прямыя BD къ FH: то будетъ имѣть утроенное ихъ отношенїе конусъ ABCDL къ нѣкоему тѣлу, или меньшему конуса EFGHN, или большему. Пусть, вопервыхъ, имѣетъ къ меньшему, тѣлу O.

6,IV. Въ кругѣ EFGH впиши квадратъ EFGH: то квадратъ EFGH больше половины круга EFGH. На квадратѣ EFGH возставь пирамиду, имѣющую туже вершину что и конусъ: то сїя пирамида будетъ больше половины конуса. Раздѣли дуги EF, FG, GH, HE по поламъ въ точкахъ P, Q, R, S; и протяни EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE: то каждый изъ треугольниковъ EPF, FQG, GRH, HSE будетъ больше половины каждаго изъ отрѣзковъ круга объемлющихъ оные. На каждомъ изъ треугольниковъ EPF, FQG, GRH, HSE возставь пирамиды, имѣющїя туже вершину что и конусъ: то каждая изъ сихъ пирамидъ больше половины отрѣзка конуса объемлющаго оную. Естьли же и оставшїяся дуги будемъ раздѣлять по поламъ, и протя-

гивать прямыя, и на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возставлять пирамиды, имѣющія туже вершину что и конусъ; и естьли сіе всегда будемъ дѣлать: то останутся наконецъ нѣкіе отрѣзки конуса, кои меньше избытка конуса EFGHN предъ тѣломъ O*. Пусть таковые останутся; и пусть сіи отрѣзки конуса, будутъ тѣ, кои на отрѣзкахъ круга EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE. Чего ради остальная пирамида, коея основаніе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N, есть больше тѣла O. Въ кругѣ ABCD впиши многоугольникъ ATBUCVDX подобный многоугольнику EPFQGRHS и подобно положенный; и на многоугольникѣ ATBUCVDX возставь пирамиду, имѣющую туже вершину что и конусъ. Пусть будетъ LBT одинъ изъ треугольниковъ содержащихъ пирамиду, коея основаніе многоугольникъ ATBUCVDX а вершина точка L; и NPF одинъ изъ треугольниковъ содержащихъ пирамиду, коея основаніе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N: и протяни KT, MP. Поелику конусъ ABCDL подобенъ конусу EFGHN: то какъ BD къ FH, такъ ось KL къ оси MN*. Но какъ BD къ FH, такъ BK къ FM: посему какъ BK къ FM,

*1, X.

*опр. 24, XI.

11,V. такъ KL къ MN; и премѣненіемъ, какъ BK
16,V. къ KL, такъ FM къ MN. И поелику углы BKL, FMN взаимно равны, ибо суть прямые; и стороны около сихъ равныхъ угловъ суть пропорціональныя: то треуголь-
6,VI. никъ BKL подобенъ треугольнику FMN. Еще же, поелику какъ BK къ KT, такъ FM къ MP; и сіи прямыя суть около равныхъ угловъ BKT, FMP, ибо углы BKT, FMP суть равночастные четырехъ прямыхъ угловъ, кои при центрахъ K, M: то, по причинѣ, что стороны около равныхъ угловъ суть пропорціональныя, треугольникъ BKT
6,VI. подобенъ треугольнику FMP. Еще же, поелику, по доказанному, какъ BK къ KL, такъ FM къ MN; но BK равна KT, а FM равна
*7 и 11,V. PM: то какъ KT къ KL, такъ PM къ MN. И сіи пропорціональныя стороны суть около равныхъ угловъ TKL, PMN, ибо они прямые: итакъ треугольникъ LKT подобенъ треугольнику NMP. И поелику, по подобію треугольниковъ LKB, NMF, какъ LB къ BK, такъ NF, къ FM; а по подобію треугольниковъ BKT, FMP, какъ KB къ BT, такъ MF къ FP: то равномѣстно, какъ LB къ BT, такъ
22,V. NF къ FP. Еще же, поелику, по подобію треугольниковъ LTK, NPM, какъ LT къ TK, такъ NP къ PM; а по подобію треугольниковъ

KBT, PMF, какъ KT къ TB, такъ MP къ PF: то равномѣстно, какъ LT къ TB, такъ NP къ PF. А доказано, что какъ TB къ BL, такъ PF къ FN: посему равномѣстно, какъ TL къ LB, такъ PN къ NF. Чего ради стороны треугольниковъ LTB, NPF суть пропорціональныя: а посему треугольники LTB, NPF суть равноугольны*, слѣдствен- *5, VI.
но и подобны. Итакъ пирамида, коея основаніе треугольникъ BKT а вершина точка L, подобна пирамидѣ, коея основаніе треугольникъ FMP а вершина точка N; ибо сіи пирамиды содержатся равномногими подобными плоскостями. Но подобныя пирамиды, имѣющія треугольныя основанія, суть взаимно въ утроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: посему пирамида BKTL къ *8.
пирамидѣ FMPN имѣетъ утроенное отношеніе прямыя BK къ FM. Естьли же точки A, X, D, V, C, U соединимъ съ точкою K, а точки E, S, H, R, G, Q съ точкою M; и естьли на каждомъ изъ произшедшихъ треугольниковъ возставимъ пирамиды, имѣющія тѣже вершины съ конусами: то подобно докажемъ, что каждая изъ пирамидъ, «кои на многоугольникѣ ATBUCVDX», къ каждой соотвѣтствующей ей пирамидѣ, «кои на многоугольникѣ EPFQGRHS», имѣетъ

утроенное отношенїе сходственной стороны BK къ сходственной FM, то есть, прямыя BD къ FH. Но какъ одинъ предъидущїй къ одному послѣдующему, такъ всѣ предъидущїе
12,V. ко всѣмъ послѣдующимъ: посему какъ пирамида BKTL къ пирамидѣ FMPN, такъ цѣлая пирамида, коея основанїе многоугольникъ ATBUCVDX а вершина точка L, къ цѣлой пирамидѣ, коея основанїе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N: слѣдственно и пирамида, коея основанїе многоугольникъ ATBUCVDX а вершина точка L, къ пирамидѣ, коея основанїе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N, имѣетъ утроенное отношенїе прямыя BD къ
11,V. FH. А по положенїю, и конусъ, коего основанїе кругъ ABCD а вершина точка L, къ тѣлу O имѣетъ утроенное отношенїе прямыя BD къ FH: посему какъ конусъ, коего основанїе кругъ ABCD а вершина точка L, къ тѣлу O, такъ пирамида, коея основанїе многоугольникъ ATBUCVDX а вершина точка L, къ пирамидѣ, коея основанїе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N: а посему премѣненїемъ, какъ конусъ, коего основанїе кругъ ABCD а вершина точка L, къ пирамидѣ что въ немъ, коея основанїе многоугольникъ ATBUCVDX а вершина точка L,

такъ тѣло O къ пирамидѣ, коея основанїе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N. Но сказанный конусъ больше пирамиды что въ немъ, ибо оную объемлетъ: посему и тѣло O больше пирамиды, коея основанїе многоугольникъ EPFQGRHS а вершина точка N: Оно же и меньше; что невозможно. Чего ради конусъ, коего основанїе кругъ ABCD а вершина точка L, къ нѣкоему тѣлу, меньшему конуса, коего основанїе кругъ EFGH а вершина точка N, не имѣетъ утроеннаго отношенїя прямыя BD къ FH.

Подобно докажемъ, что и конусъ EFGHN къ нѣкоему тѣлу меньшему конуса ABCDL не имѣетъ утроеннаго отношенїя прямыя FH къ BD.

Говорю же, что конусъ ABCDL къ нѣкоему тѣлу и большему конуса EFGHN не имѣетъ утроеннаго отношенїя прямыя BD къ FH. Ибо, буде возможно, пусть имѣетъ къ большему, тѣлу O. Итакъ, преложенїемъ, тѣло O къ конусу ABCDL имѣетъ утроенное отношенїе прямыя FH къ BD. Но какъ тѣло O къ конусу ABCDL, такъ конусъ EFGHN къ нѣкоему тѣлу меньшему конуса ABCDL*: *лем. 2.
посему конусъ EFGHN къ нѣкоему тѣлу, меньшему конуса ABCDL, имѣетъ утроен-

11,V. ное отношенїе прямыя FH къ BD; что, по доказанному уже, невозможно. Посему конусъ ABCDL къ нѣкоему тѣлу, большему конуса EFGHN, не имѣетъ утроеннаго отношенїя прямыя BD къ FH. А доказано, что и ни къ меньшему: Чего ради конусъ ABCDL къ самому конусу EFGHN имѣетъ утроенное отношенїе прямыя BD къ FH.

Но какъ конусъ къ конусу, такъ цилиндръ къ цилиндру*; ибо цилиндръ, имѣющїй тоже основанїе съ конусомъ и высоту равную, есть прекратный сего конуса, поелику, по доказанному, всякїй конусъ есть третья часть цилиндра, имѣющаго тоже основанїе и равную высоту*: чего ради и цилиндръ къ цилиндру имѣетъ утроенное отношенїе прямыя BD къ FH*.

*15,V.

*10.

*11,V.

Итакъ подобные конусы и цилиндры, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIII.

Ежели цилиндръ пересѣченъ плоскостїю параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: то изъ произшедшихъ цилиндровъ будетъ какъ одинъ къ другому, такъ ось перваго къ оси втораго.

Пусть цилиндръ AD будетъ пересѣченъ параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ AB, CD плоскостїю GH, встрѣчающею его ось EF въ точкѣ K. Говорю, что какъ цилиндръ BG къ цилиндру GD, такъ ось EK къ оси KF.

Продолжи ось EF на обѣ стороны къ точкамъ L, M; и возьми сколько ниесть прямыхъ EN, NL равныхъ оси EK; и сколько ниесть прямыхъ FO, OM равныхъ оси FK; и чрезъ точки L, N, O, M проведи плоскости параллельныя къ плоскостямъ AB, CD; и на плоскостяхъ проходящихъ чрезъ точки L, N, O, M и около центровъ L, N, O, M вообрази круги PQ, RS, TU, VX равные кругамъ AB, CD; и еще вообрази цилиндры QR, RB, DT, TX.

Поелику оси LN, NE, EK взаимно равны: то цилиндры QR, RB, BG суть взаимно какъ основанїя*: но основанїя ихъ равны; *11. посему и цилиндры QR, RB, BG взаимно равны. Итакъ, поелику оси LN, NE, EK взаимно равны; и цилиндры QR, RB, BG взаимно равны; и оси LN, NE, EK суть равномногїя цилиндрамъ QR, RB, BG: то сколько кратная есть ось LK оси EK, столько кратный есть и цилиндръ QG цилиндра GB. Подобно докажемъ, что сколько кратная есть ось MK оси KF, столько

кратный есть и цилиндръ XG цилиндра GD. И естьли ось KL равна оси KM, то и цилиндръ QG равенъ цилиндру GX; и естьли ось KL больше оси KM; то и цилиндръ QG больше цилиндра GX; и естьли меньше, то меньше. Итакъ изъ имѣющихся четырехъ величинъ, то есть двухъ осей EK, KF и двухъ цилиндровъ BG, GD, взяты оси EK и цилиндра BG равнократныя, ось KL и цилиндръ QG, а оси KF и цилиндра GD равнократныя, ось KM и цилиндръ GX: и доказано, что естьли ось KL больше оси KM, то и цилиндръ QG больше цилиндра GX; и естьли равна, то равенъ; и естьли меньше, то меньше: чего ради какъ ось EK къ оси KF, такъ цилиндръ BG къ цилин-
оп.5,V. дру GD. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XIV.

Конусы и цилиндры, имѣющіе равныя основанія, суть взаимно какъ высоты.

Пусть будутъ цилиндры EB, FD на равныхъ основаніяхъ AB, CD. Говорю, что какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD, такъ ось GH къ оси KL.

Продолжи ось KL къ точкѣ N; и положи прямую LN равную оси GH; и около оси LN вообрази цилиндръ CM.

Поелику цилиндры EB, CM имѣютъ туже высоту; то они суть взаимно какъ основанія*: но основанія взаимно равны; посему *11.
и цилиндры EB, CM взаимно равны. И поелику цилиндръ FM пересѣченъ плоскостію CD, параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: то какъ цилиндръ CM къ цилиндру FD, такъ ось LN къ оси KL*. Но *13.
цилиндръ CM равенъ цилиндру EB, и ось LN равна оси GH: посему какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD, такъ ось GH къ оси KL*. *7 и 11, V.

Но какъ цилиндръ EB къ цилиндру FD, такъ конусъ ABG къ конусу CDK*, ибо *15, V.
цилиндры суть трекратные конусовъ*: чего *10.
ради какъ ось GH къ оси KL, такъ конусъ ABG къ конусу CDK, и такъ цилиндръ EB къ цилиндру FD*. ч. и д. н. *11, V.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XV.

Равныхъ конусовъ и цилиндровъ основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И которыхъ конусовъ и цилиндровъ, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

Пусть будутъ равные конусы и цилиндры, коихъ основанія суть круги ABCD, EFGH, а ихъ поперечники AC, EG; и оси

KL, MN, кои суть и высоты конусовъ или цилиндровъ: и дополни цилиндры AO, EP. Говорю, что цилиндровъ AO, EP основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL.

Высота KL, или равна высотѣ MN, или нѣтъ. Пусть будетъ, вопервыхъ, равна.

Поелику цилиндръ AO равенъ цилиндру EP; а конусы и цилиндры, имѣющіе туже
11. высоту, суть взаимно какъ основанія: посему и основаніе ABCD равно основанію EFGH. Чего ради основанія суть обратно пропорціональны высотамъ; то есть, какъ основаніе ABCD къ основанію EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL.

Но пусть не будетъ высота KL равна высотѣ MN; и пусть MN будетъ большая.

Отъ высоты MN отними прямую QM равную KL; и чрезъ точку Q разсѣки цилиндръ EP плоскостію TVS параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ круговъ EFGH, RP; и на основаніи EFGH а по высотѣ QM вообрази цилиндръ ES.

Поелику цилиндръ AO равенъ цилиндру EP, а ES есть другой нѣкій цилиндръ: то какъ цилиндръ AO къ цилиндру
7, V. ES, такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES.

Но какъ цилиндръ AO къ цилиндру ES, такъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH*, ибо цилиндры AO, ES имѣютъ *11. туже высоту; а какъ цилиндръ EP къ ES, такъ высота MN къ MQ*, ибо цилиндръ *13. EP пересѣченъ плоскостїю TVS параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: посему какъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH, такъ высота MN къ высотѣ MQ*. Но *11,V. высота MQ равна высотѣ KL: посему какъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL*. Итакъ основанїя цилиндровъ AO, EP суть обратно пропорцїональны высотамъ. *7 и 11,V.

Но пусть основанїя цилиндровъ AO, EP будутъ обратно пропорцїональны высотамъ; то есть, какъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL. Говорю, что цилиндръ AO равенъ цилиндру EP.

Ибо, сдѣлавъ тоже строенїе, поелику какъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH, такъ высота MN къ высотѣ KL; а высота KL равна высотѣ MQ: то какъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH, такъ высота MN къ высотѣ MQ*. Но какъ основанїе ABCD къ основанїю EFGH, такъ цилиндръ AO къ цилиндру ES*, ибо имѣютъ *7 и 11,V. *11.

туже высоту; а какъ высота MN къ высотѣ
14. MQ, такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES:
посему какъ цилиндръ AO къ цилиндру ES,
11,V. такъ цилиндръ EP къ цилиндру ES: а посему
9,V. цилиндръ AO равенъ цилиндру EP.

Подобно докажемъ сїе и о конусахъ. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVI.

Въ большемъ изъ двухъ круговъ, находящихся около тогоже центра, вписать многоугольникъ, имѣющїй равныя стороны и въ четномъ числѣ, не прикасающїйся къ меньшему кругу.

Пусть будутъ данные два круга ABCD, EFGH около тогоже центра K. Надлежитъ въ большемъ изъ нихъ, кругѣ ABCD, вписать многоугольникъ, имѣющїй равныя стороны и въ четномъ числѣ, не прикасающїйся къ меньшему кругу EFGH.

Чрезъ центръ K проведи прямую BKD; и отъ точки G проведи, подъ прямыми углами къ BD, прямую GA; и продолжи оную до C: то
16,III. AC будетъ касательная къ кругу EFGH.
Ежели полуокружность BAD раздѣлимъ по поламъ, и половину ея по поламъ; и естьли сїе всегда будемъ дѣлать: то останется наконецъ нѣкая дуга, меньшая

дуги AD*. Пусть таковая останется; *1,X.
и пусть будетъ оная LD. Отъ L проведи, перпендикулярную къ BD, прямую LM; и продолжи оную до N; и протяни LD, DN.

Итакъ LD равна DN*. И поелику LN параллельна къ AC; и AC прикасается токмо къ кругу EFGH: то LN не прикаснется къ кругу EFGH; а тѣмъ паче прямыя LD, DN не прикаснутся къ кругу EFGH. Итакъ, естьли въ кругѣ ABCD непрерывно помѣстимъ прямыя равныя прямой LD: то вписанъ будетъ многоугольникъ, имѣющій равныя стороны и въ четномъ числѣ, не прикасающійся къ меньшему кругу EFGH. ч. и с. н. *29,III.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVII.

Въ большемъ изъ двухъ шаровъ, находящихся около тогоже центра, вписать многогранникъ, поверхностію своею не прикасающійся къ меньшему шару.

Вообрази два шара около тогоже центра A. Надлежитъ въ большемъ шарѣ вписать многогранникъ, поверхностію своею не прикасающійся къ меньшему шару.

Пусть шары будутъ пересѣчены чрезъ центръ какою ниесть плоскостію: то

сѣченія будутъ круги. Ибо шаръ произходитъ чрезъ обращеніе полукружія на
оп.14,X. неподвижномъ его поперечникѣ; слѣдственно при всякомъ положеніи сего полукружія, продолженная его плоскость насѣчетъ на поверхности шара кругъ. И явно, что сей кругъ будетъ наибольшій; ибо поперечникъ шара, который есть и поперечникъ полукружія, то есть круга, есть больше всѣхъ прямыхъ проводимыхъ
15,III. въ кругѣ или въ шарѣ. Итакъ пусть будетъ BCDE кругъ большаго шара, а FGH кругъ меньшаго; и проведи круговъ сихъ поперечники BD, CE подъ прямыми углами одинъ къ другому. И поелику суть два круга BCDE, FGH около тогоже центра: то въ большемъ изъ нихъ, BCDE, впиши многоугольникъ, имѣющій равныя стороны и въ четномъ числѣ, не прикасающійся
16. сторонами къ меньшему кругу FGH; и пусть стороны сего многоугольника, кои въ четверти BE круга, будутъ BK, KL, LM, ME. Протяни KA, и продолжи оную до N; отъ точки A возставь, подъ прямыми углами къ плоскости круга BCDE,
12,XI. прямую AO, которая пусть встрѣтитъ поверхность шара въ точкѣ O. Чрезъ AO и каждую изъ прямыхъ BD, KN

проведи плоскости: то общія сѣченія сихъ плоскостей съ поверхностію шара будутъ, по доказанному уже, два наибольшіе круга. Пусть будутъ таковые; полукружія же, кои на поперечникахъ BD, KN, пусть будутъ BOD, KON. И поелику OA перпендикулярна къ плоскости круга BCDE; то всѣ плоскости, проводимыя чрезъ OA, будутъ перпендикулярны къ плоскости круга BCDE*: *18,XI.
посему полукружія BOD, KON перпендикулярны къ плоскости круга BCDE. И поелику полукружія BED, BOD, KON равны, ибо суть на равныхъ поперечникахъ EC, BD, KN: то и четверти BE, BO, KO взаимно равны. Посему сколько сторонъ помянутаго многоугольника помѣщено въ четверти BE, столько же возможно помѣстить и въ каждой изъ четвертей BO, KO прямыхъ, равныхъ прямымъ BK, KL, LM ME: помѣсти таковыя, и пусть оныя будутъ BP, PQ, QR, RO, KS, ST, TU, UO; и протяни SP, TQ, UR. Отъ точекъ P, S проведи перпендикулярныя прямыя къ плоскости круга BCDE*; то онѣ упадутъ на BD, KN *11,XI.
взаимныя сѣченія плоскостей*, ибо плоско- *38,XI.
сти полукружій BOD, KON перпендикулярны къ плоскости круга BCDE. Пусть упадутъ оныя; и пусть сіи прямыя

будутъ PV, SX; и протяни VX. Поелику на равныхъ полуокружностяхъ BOD, KON взяты равныя дуги BP, KS, и проведены перпендикулярныя прямыя PV, SX: то PV равна SX, и BV равна KX. (97). Но цѣлая прямая BA равна цѣлой KA; посему и остальная VA равна остальной XA: а посему какъ BV къ VA, такъ KX къ XA: чего ради XV параллельна къ KB. И поелику каждая изъ прямыхъ PV, SX перпендикулярна къ плоскости круга BCDE; то PV параллельна къ
6,XI. SX: а доказано, что онѣ и равны; чего ради и прямыя VX, SP суть взаимно равны
33,I. и параллельны. Итакъ, поелику XV параллельна къ SP и къ KB, то и SP параллельна къ KB; но сіи прямыя соединены прямыми BP, KS: посему четыреугольникъ KBPS есть на одной плоскости; ибо ежели двѣ прямыя суть параллельныя, и на каждой изъ нихъ взяты какія ниесть точки, то прямая протянутая чрезъ сіи точки есть на одной плоскости съ параллельны-
8,XI. ми. Потому же и каждый изъ четыреугольниковъ SPQT, TQRU есть на одной плоскости. (98). А и треугольникъ URO есть на од-
2,XI. ной плоскости. Посему, естьли вообразимъ прямыя отъ точекъ P, S, Q, T, R, U къ точкѣ A протянутыя: то составленъ

будетъ между дугами BO, KO нѣкій многогранникъ, состоящій изъ пирамидъ, коихъ основанія суть четыреугольники KBPS, SPQT, TQRU и треугольникъ URO, а общая вершина точка A. Естьлижъ и на каждой изъ сторонъ KL, LM, ME состроимъ тоже, какъ и на KB; и естьли сіе же состроимъ въ прочихъ трехъ четвертяхъ полушарія, и еще въ остальномъ полушаріи: то составленъ будетъ нѣкій многогранникъ, вписанный въ большемъ шарѣ, состоящій изъ пирамидъ, коихъ основанія суть сказанные четыреугольники и треугольникъ URO, и плоскости соотвѣтствующія имъ въ прочихъ частяхъ шара; а общая вершина точка A.

Говорю еще, что помянутый многогранникъ поверхностію своею не прикасается къ меньшему шару, на коемъ кругъ FGH. Отъ точки A проведи, перпендикулярную къ плоскости четыреугольника KBPS, прямую AY*, которая пусть встрѣтитъ сію плоскость въ точкѣ Y; и протяни BY, YK. *11,XI.

Поелику AY перпендикулярна къ плоскости KBPS; то AY перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ съ нею встрѣчающимся и лежащимъ на сей плоскости*: посему AY перпендикулярна къ каждой изъ прямыхъ BY, YK. оп.3,XI.

Но поелику AB равна AK; то квадратъ изъ AB равенъ квадрату изъ AK. Но квад-
47, 1. рату изъ AB равны квадраты изъ AY, YB, ибо уголъ при Y есть прямой; а квадрату изъ AK равны квадраты изъ AY, YK: посему квадраты изъ AY, YB равны квадратамъ изъ AY, YK. Отними обще квадратъ изъ AY; посему остальной квадратъ изъ BY равенъ остальному изъ YK; а посему и BY равна YK. Подобно докажется, что каждая изъ прямыхъ, протянутыхъ отъ точки Y до точекъ P, S, равна каждой изъ прямыхъ BY, YK. Итакъ кругъ, написанный изъ центра Y разстоянїемъ которой ниесть изъ прямыхъ YB, YK, пройдетъ и чрезъ точки P, S; и четыреугольникъ KBPS будетъ въ кругѣ. И поелику KB больше XV, а XV равна SP; то KB больше и SP. Но KB равна каждой изъ прямыхъ KS, BP; посему и каждая изъ прямыхъ BP, KS больше SP. И поелику четыреугольникъ KBPS вписанъ въ кругѣ, и прямыя KB, BP, KS равны, а прямая PS меньше, и BY есть прямая отъ центра: то квадратъ изъ KB есть больше нежели двукратный квадрата изъ BY (99). Отъ точки K проведи, перпендикулярную къ BD, прямую KZ. Поелику BD меньше нежели двукратная DZ; и какъ DB къ DZ, такъ прямоугольникъ

въ DB, BZ къ прямоугольнику въ DZ, ZB*: *1,VI.
посему, естьли изъ BZ написать квадратъ, и на ZD дополнить параллелограммъ, то будетъ прямоугольникъ въ DB, BZ меньше двукратнаго прямоугольника въ DZ, ZB. Протяни еще KD: Итакъ прямоугольникъ въ DB, BZ равенъ квадрату изъ KB*; и прямоугольникъ въ DZ, ZB равенъ квадрату изъ KZ: *слѣ:8,и 17,VI.
посему квадратъ изъ KB меньше двукратнаго квадрата изъ KZ. Но квадратъ изъ KB больше двукратнаго квадрата изъ BY; посему и квадратъ изъ KZ больше квадрата изъ BY. И поелику BA равна KA; то квадратъ изъ BA равенъ квадрату изъ KA. Но квадрату изъ BA равны квадраты изъ BY, YA; а квадрату изъ KA равны квадраты изъ KZ, ZA: посему квадраты изъ BY, YA равны квадратамъ изъ KZ, ZA: Но въ нихъ квадратъ изъ KZ больше квадрата изъ BY; посему остальной квадратъ изъ AZ меньше остальнаго изъ YA; а посему AY больше AZ: слѣдственно AY гораздо больше AG. Но AY есть перпендикулярная отъ центра къ одному изъ основанiй многогранника проведенная, а AG прямая отъ центра меньшаго шара до поверхности его: чего ради тотъ многогранникъ не прикасается къ поверхности шара меньшаго.

Иначе. Мы еще докажемъ иначе и короче, что AY больше AG.

Отъ точки G проведи, подъ прямыми углами къ AG, прямую GL; и протяни AL.

Естьли раздѣлимъ дугу EB по поламъ; и половину ея раздѣлимъ по поламъ; и естьли сїе всегда будемъ дѣлать: то останется наконецъ нѣкая дуга, которая будетъ меньше дуги круга BCDE, стя-
1,X. гиваемой прямою равною GL. Пусть таковая останется; и пусть она будетъ дуга KB: посему прямая KB будетъ меньше прямой GL. Но поелику четыреугольникъ BKSP вписанъ въ кругѣ, и прямыя PB, BK, KS равны, а PS меньше: то уголъ BYK есть тупой (100); посему прямая BK
19,I. больше BY: Но GL больше BK; а посему GL и гораздо больше BY; слѣдственно и квадратъ изъ GL больше квадрата изъ BY. И поелику AL равна AB; то квадратъ изъ AL равенъ квадрату изъ AB. Но квадрату изъ AL равны квадраты изъ AG, GL; а квадрату изъ AB равны квадраты изъ BY, YA: посему квадраты изъ AG, GL равны квадратамъ изъ BY, YA. Но квадратъ изъ BY меньше квадрата изъ GL; чего ради квадратъ

изъ YA больше квадрата изъ AG: а посему и прямая AY больше прямой AG. (101).

Итакъ въ большемъ изъ двухъ шаровъ, около тогоже центра находящихся, вписанъ многогранникъ, поверхностію своею не прикасающійся къ меньшему шару.

Слѣдствіе. Ежели вписанъ будетъ въ другомъ шарѣ многогранникъ, подобный вписанному въ шарѣ BCDE: то многогранникъ, вписанный въ шарѣ BCDE, къ многограннику, вписанному въ другомъ шарѣ, будетъ имѣть утроенное отношеніе поперечника шара BCDE къ поперечнику другаго шара. Ибо, раздѣливъ сіи многогранники на равномногія и равнорасположенныя пирамиды, произойдутъ пирамиды подобныя. Но подобныя пирамиды суть взаимно въ утроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ*: посему пирамида, коея основаніе четыреугольникъ KBPS а вершина точка A, къ соотвѣтствующей пирамидѣ въ другомъ шарѣ имѣетъ утроенное отношеніе сходственной стороны къ сходственной сторонѣ, то есть, утроенное отношеніе прямой линіи AB отъ центра шара, что около точки A, къ прямой отъ центра другаго шара. Подобно и каждая изъ *слѣд:3.

прочихъ пирамидъ, содержащихся въ шарѣ, коего центръ A, къ каждой изъ пирамидъ, имъ соотвѣтствующихъ въ другомъ шарѣ, будетъ имѣть утроенное отношенїе прямыя AB къ прямой отъ центра другаго шара. Но поелику какъ одинъ предъидущїй къ одному послѣдующему, такъ всѣ предъидущїе ко всѣмъ послѣдующимъ: посему цѣлый многогранникъ въ шарѣ, коего центръ A, къ цѣлому многограннику, что въ другомъ шарѣ, имѣетъ утроенное отношенїе прямыя AB къ прямой отъ центра другаго шара, то есть утроенное отношенїе поперечника BD къ поперечнику другаго шара. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ XVIII.

Шары суть взаимно въ утроенномъ отношенїи поперечниковъ.

Вообрази шары ABC, DEF, коихъ поперечники BC, EF. Говорю, что шаръ ABC къ шару DEF имѣетъ утроенное отношенїе поперечника BC къ EF.

Ибо, буде шаръ ABC къ шару DEF не имѣетъ утроеннаго отношенїя BC къ EF; то шаръ ABC къ нѣкоему шару, или меньшему нежели DEF, или большему, будетъ

имѣть утроенное отношенїе BC къ EF.

Пусть, вопервыхъ, имѣетъ къ меньшему, шару GHK.

Вообрази, что шары DEF, GHK суть около тогоже центра; и въ большемъ шарѣ DEF впиши многогранникъ, своею поверхностїю не прикасающїйся къ меньшему шару GHK*; и впиши въ шарѣ ABC многогранникъ подобный многограннику, что въ шарѣ DEF. *17.

Итакъ многогранникъ въ шарѣ ABC къ многограннику въ шарѣ DEF имѣетъ утроенное отношенїе поперечника BC къ EF*. Но и шаръ ABC къ шару GHK имѣетъ утроенное отношенїе BC къ EF: посему какъ шаръ ABC къ шару GHK, такъ многогранникъ въ шарѣ ABC къ многограннику въ шарѣ DEF*; а посему, премѣненїемъ, какъ шаръ ABC къ многограннику что въ немъ, такъ шаръ GHK къ многограннику въ шарѣ DEF. Но шаръ ABC больше многогранника что въ немъ: посему и шаръ GHK больше многогранника что въ шарѣ DEF; онъ же и меньше многогранника, ибо онымъ объемлется: что невозможно. Чего ради шаръ ABC къ нѣкоему шару меньшему, нежели DEF, не имѣетъ утроеннаго отношенїя поперечника BC къ EF. *слѣд:17. *11,V.

Подобно докажемъ, что и шаръ DEF къ нѣкоему шару меньшему, нежели ABC, не имѣетъ утроеннаго отношенія поперечника EF къ BC.

Говорю же, что шаръ ABC и къ нѣкоему шару большему, нежели DEF, не имѣетъ утроеннаго отношенія поперечника BC къ EF.

Ибо, буде возможно, пусть имѣетъ къ большему, шару LMN. Посему, преложеніемъ, шаръ LMN къ шару ABC имѣетъ утроенное отношеніе поперечни-
сл:4,V. ка EF къ BC. Но какъ шаръ LMN къ шару ABC, такъ шаръ DEF къ нѣкоему шару меньшему нежели ABC, по доказанному уже, ибо шаръ LMN больше шара DEF: посему и шаръ DEF къ меньшему шару, нежели ABC, имѣетъ утроенное отно-
11,V. шеніе поперечника EF къ BC; что, по доказанному уже, невозможно. Посему шаръ ABC къ нѣкоему шару большему, нежели DEF, не имѣетъ утроеннаго отношенія поперечника BC къ EF. А доказано, что и ни къ меньшему: Итакъ шаръ ABC имѣетъ къ самому шару DEF утроенное отношеніе поперечника BC къ EF. ч. и д. н. (102).

КОНЕЦЪ

ВОСЬМИ КНИГАМЪ ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ.

ПРИМѢЧАНІЯ

И

ПРИБАВЛЕНІЯ

КЪ ВОСЬМИ КНИГАМЪ

ЭВКЛИДОВЫХЪ НАЧАЛЪ,

содержащимъ въ себѣ

ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.

ПРИМѢЧАНІЯ И ПРИБАВЛЕНІЯ

КЪ КНИГѢ ПЕРВОЙ.

(1) Сіе опредѣленіе есть слѣдствіе предъидущаго.

(2) Прямую линію опредѣляютъ различными образами. Платонъ говоритъ: прямая линія есть ша, которой края заслоняются посредствующими точками. Сіе опредѣленіе въ сущности не разнится отъ Эвклидова. Архимедъ въ книгѣ de Sphaera et Cylindro принимаетъ за начало, что прямая есть кратчайшая изъ линій тѣже концы имѣющихъ (*). Новые Геометры обыкновенно употребляютъ сіе начало какъ опредѣленіе. Но Даламбертъ противу онаго не безъ основанія возражаетъ: откуда извѣстно, что отъ одной точки до другой есть токмо одинъ путь кратчайшій? Для чего не могли бы быть многіе, всѣ различные, всѣ равные и всѣ кратчайшіе? (**). Въ слѣдствіе сего Гурьевъ отвергаетъ предъидущее опредѣленіе прямой линіи, а принимаетъ слѣдующее: Когда двѣ точки одной линіи лежа на двухъ точкахъ другой, дѣлаютъ, что и самыя

(*) Archimedis opera per J. Barrow. 1675. Сіе изданіе почитается лучшимъ.

(**) Mélanges de littérature, etc. T. V. pag. 205.

линіи лежатъ одна на другой; то каждая изъ оныхъ называется прямою (*). Не входя въ разбирательство обоюдности сего опредѣленія, замѣтимъ только, что неправильно полагаютъ, якобы таково было первоначально и Эвклидово опредѣленіе, но въ послѣдствіи худыми переписчиками и толкователями перемѣнено. Ибо для чего бы Эвклиду въ предложеніи 4мъ книги I говорить: *А буде, по совмѣщеніи* B *съ* E *а* C *съ* F, *основаніе* BC *не совмѣстится съ основаніемъ* EF. Для чего бы также ему полагать 12ю аксіому? и проч.

(3) Геронъ говоритъ: плоскость есть такая поверхность, что прямая лежащая на какихъ бы то ни было двухъ ея точкахъ, лежитъ и вся на ней. Сіе опредѣленіе принимается почти всѣми новыми Геометрами. Однакожъ нельзя не согласиться, что Эвклидово показываетъ гораздо ощутительнѣе нежели Героново, что плоская поверхность есть то между поверхностями, что прямая линія между линіями. Притомъ изъ Геронова опредѣленія непосредственно слѣдуетъ, или лучше сказать, въ немъ предполагается предложеніе 1е книги XI, которое при опредѣленіи Эвклидовомъ должно быть доказано, а сіе одно даетъ уже послѣднему преимущество. Ибо чѣмъ меньшими свойствами что ниесть опредѣляется (изъ коихъ однакожъ могутъ выведены быть всѣ прочія), тѣмъ опредѣленіе лучше. Изъ сего видно, что Роберту Симсону не слѣдовало замѣнять Эвклидова опредѣленія Героновымъ, тѣмъ паче, что

(*) Опытъ о усовершенствованіи Елементовъ Геометріи, стр. 205. Основанія Геометріи: изд. 1811 г. стр. 3.

онъ опредѣленіе прямой линіи оставилъ безъ перемѣны (*).

(4) Здѣсь можно прибавить: а оныя равныя прямыя радіусами или полупоперечниками именуются. Эвклидъ называетъ радіусъ прямою отъ центра.

(5) Послѣдняя часть сего опредѣленія есть слѣдствіе изъ онаго, которое можно доказать такъ:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Кругъ дѣлится поперечникомъ по поламъ.

Пусть будетъ кругъ ABCD (Фиг. 2.), а E центръ его, и AEC поперечникъ. Говорю, что кругъ ABCD дѣлится поперечникомъ AC по поламъ.

Ибо, естьли помѣстимъ сего круга часть ADC, не перемѣняя AC, на часть ABC, то линія ADC совмѣстится съ линіею ABC. Буде же не такъ; то она упадетъ или внутрь, или внѣ, или частію внутрь, а частію внѣ ABC. Пусть упадетъ внѣ, какъ AFC. Протяни какъ ниесть прямую EBF.

Поелику AFC есть часть круга, то AE равна EF*, *опр. 15.
ибо суть прямыя отъ центра. Потому же AE равна и EB. Итакъ каждая изъ прямыхъ FE, BE равна AE. А равныя тому же, суть и взаимно равны*; посему EF *акс. 1.
равна EB, большая меньшей, что невозможно*. Чего *акс. 8.
ради ADC не упадетъ внѣ ABC. Подобно докажемъ, что она не упадетъ и внутрь, и ни частію внутрь а частію внѣ: слѣдственно ADC совмѣстится съ ABC.

Итакъ кругъ дѣлится поперечникомъ по поламъ. ч. и д. н.

(*) Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, etc. a Roberto Simson. Glasguæ. 1756.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Б.

Двѣ прямыя линіи не могутъ имѣть общей части.

Ибо, естьли возможно, пусть будутъ двѣ прямыя AB, AC, (фиг. 3). имѣющія общую часть AD. Возьми на ней какую ниесть точку A; и изъ центра C,
пр 3. разстояніемъ DA напиши кругъ AEBF, который прямыя AB, AC пусть еще пересѣчетъ въ B, C.
опр 17. Поелику ADB поперечникъ, то AEB есть полу-
опр 18. кружіе. Еще же, поелику ADC поперечникъ, то
A и AEC есть полукружіе. Посему AEB равно AEC: что нелѣпо.

Итакъ двѣ прямыя линіи, и проч. ч. и д. и.

(6) Все заключающееся между знаками «» прибавлено, частію для пополненія, а частію для поясненія.

(7) Кестнеръ объясняетъ предмѣтъ всѣхъ сихъ требованій слѣдующимъ образомъ (*): «Точка есть «предѣлъ линіи, а посему и безъ всякаго протяже«нія; слѣдственно не имѣетъ она ни частей, ни «протяженія, и множество одна подлѣ другой «положенныхъ точекъ не составляютъ линіи. Но «поелику линію вездѣ можно кончить по произ«воленію; то вездѣ въ цѣломъ ея протяженіи можно «имѣть точки. И какъ здѣсь дѣло идетъ о воз«можности; то все равно сказать, что линія «вездѣ можетъ имѣть точки, или что она вездѣ ихъ «имѣетъ. Итакъ можно вездѣ на линіи принимать

(*) Начальныя основанія Математики А. Г. Кестнера Ч. II. стран. 3 и 4.

« точки. Но нѣтъ разности въ томъ, вездѣль на « линіи принимать точки, или представлять себѣ « одну только точку, которая мало по малу пере- « ходила въ разныя мѣста линіи, ибо одна точка « ни чѣмъ не разнствуетъ отъ другой точки. Чего « ради и говорятъ, что линія происходитъ отъ « движенія точки. Сіе не значитъ однакожъ, будтобъ « линія состояла изъ точекъ лежащихъ одна подлѣ « другой; ибо не можно представить себѣ движенія, « не полагая мѣста занимаемаго точкою теперь, и « мѣста занимаемаго послѣ, въ нѣкоторомъ раз- « стояніи. Сіе разстояніе есть уже линія; и боль- « шая линія состоитъ изъ меньшихъ, а не изъ « точекъ ».

Что сказано о линіи въ отношеніи точки, то самое можно сказать о поверхности въ отношеніи линіи.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ С.

(8) Всѣ прямые углы равны взаимно.

Пусть будутъ углы ABC, DEF (фиг. 3) прямые. Говорю, что уголъ ABC равенъ углу DEF.

Ибо, естьли углы ABC, DEF не равны; то одинъ изъ нихъ большій: пусть ABC будетъ большій. Помѣсти уголъ DEF на ABC, и положи точку E на B, и прямую ED на BA; то, поелику уголъ ABC больше угла DEF, прямая EF упадетъ внутри угла ABC. Пусть упадетъ, какъ BG; посему уголъ ABG равенъ углу DEF. Продолжи впрямъ съ BC прямую BH*, и впрямъ съ BG прямую BK*. *пр.2.

Поелику уголъ ABG прямой, то онъ равенъ углу

опр.10. ABK. Потому же и уголъ ABC равенъ углу ABH. Но уголъ ABC, то есть ABH больше угла ABG; слѣдственно онъ больше и угла ABK, меньшій большаго; что нелѣпо. Чего ради углы ABC, DEF не неравны; слѣдственно равны.

Итакъ всѣ прямые углы, и проч. ч. и д. н.

(9) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли треугольника всѣ три стороны взаимно равны; то и всѣ три угла взаимно равны.

(10) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли треугольника всѣ три угла взаимно равны; то и всѣ три стороны взаимно равны.

(11) Эвклидъ доказываетъ сіе предложеніе токмо въ томъ случаѣ, когда одна изъ точекъ, отъ коихъ проводятся прямыя; будетъ внѣ угла составляемаго проведенными прямыми отъ другой точки. Естьли же будетъ внутри, то Клавій (*), Р. Симсонъ и другіе толкователи доказываютъ такъ:

Но пусть будетъ вершина одного, угла ADB,
пр.1. внутрь другаго ACB. Протяни CD; и продолжи
пр.2. AC, AD къ точкамъ E, F.

Поелику AC равна AD, и онѣ продолжены къ E, F;
5. то уголъ ECD равенъ углу FDC; посему уголъ FDC больше угла BCD; а тѣмъ паче уголъ BDC больше угла DCB. Еще же, поелику CB равна BD;

(*) Euclidis elementorum libri XV, auctore Cristophoro Clavio S. J. 1654.

то уголъ CDB равенъ углу DCB*; а по доказан- *5.
ному гораздо больше: что невозможно.

Естьли же точка D будетъ на BC; то предложеніе само собою явствуетъ*. *акс. 9.

Пейрардъ думаетъ (*), что вышепредложеннаго случая нѣтъ нужды доказывать, потому что оный доказанъ самимъ Эвклидомъ въ пред: 21мъ. Но сего принять нельзя: ибо 21е предложеніе чрезъ посредство 11го и нѣкоторыхъ другихъ, само основывается на 8мъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

(12) Естьли при какой ниесть прямой и при точкѣ на ней, двѣ прямыя, нележащія по туже торону, дѣлаютъ противуположные углы взаимно равные; то сіи двѣ прямыя будутъ взаимно впрямъ.

Пусть при какой ниесть прямой AB (фиг. пр. 15), и при точкѣ на ней E, двѣ прямыя EC, ED, нележащія по туже сторону, дѣлаютъ противуположные углы AEC, DEB взаимно равные. Говорю, что CE будетъ впрямъ съ ED.

Поелику прямая CE поставлена на прямую AEB; то углы AEC, CEB равны двумъ прямымъ*. Но *13.
уголъ AEC равенъ, по положенію, углу BED; посему и углы CEB, BED равны двумъ прямымъ: и они суть смѣжные. Но естьли при какой ниесть прямой и при точкѣ на ней, двѣ прямыя, нележащія по туже сторону, дѣлаютъ смѣжные

(*) Les Elémens de Géométrie d'Euclide, par F. Peyrard. 1804. pag. 560, 561.

углы, равные двумъ прямымъ; то сіи двѣ прямыя
14. суть взаимно впрямъ: посему CE есть впрямъ съ ED.

Итакъ, ежели при какой ниесть, и проч. ч. и д. н.

(13) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что отъ точки взятой по которую ниесть сторону прямой линіи, не можно провести болѣе одной къ ней перпендикулярной; ибо въ противномъ случаѣ былъ бы треугольника внѣшный уголъ равенъ внутреннему противулежащему; что невозможно.

(14) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли треугольникъ имѣетъ одинъ уголъ прямой, или одинъ тупой; то прочіе суть острые.

(15) Здѣсь могутъ быть три случая: то есть, прямая EG или упадетъ надъ прямою EF, какъ у Эвклида, или по самой EF, или подъ оною. Чтобы всѣ случаи заключить въ одномъ, Р. Симсонъ прежде словъ: *Поелику уголъ* ABC и проч. помѣщаетъ сіи: *Изъ прямыхъ DE, DF пусть будетъ DE не больше прямой DF.*

(16) По принятому порядку всѣми почти издателями Эвклида, здѣсь слѣдовало бы доказать 12ю аксіому (допустивъ, что она требуетъ доказательства): но поелику все, что доселѣ ни предложено Геометрами о семъ предмѣтѣ, есть болѣе или менѣе несовершенно, то здѣсь довольно будетъ сказать, что аксіома 12я еще не доказана. Впрочемъ, желающіе имѣть понятіе, сколько для сего сдѣлано усилій, и сколько оныя успѣшны были, могутъ читать о семъ: въ Mémoires de l'Académie

de Berlin, на 1788 и 1789 годы, также въ сочиненіяхъ Лежандра (*), Бертранда (**) и Гурьева. Доказательство Россійскаго Геометра есть лучшее.

(17) Слѣдствіе. 1. Посему всѣ три угла всякаго треугольника равны всѣмъ тремъ угламъ другаго треугольника. Итакъ, естьли два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго, или вмѣстѣ, или каждый каждому; то и остальной равенъ остальному.

Слѣдствіе 2. Равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ каждый изъ острыхъ угловъ есть половина прямаго.

Слѣдствіе 3. Равносторонныхъ треугольниковъ каждый уголъ есть треть двухъ угловъ прямыхъ, или двѣ трети прямаго.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ. Е.

Прямой уголъ раздѣлить на три равныя части.

Пусть будетъ прямой уголъ ABC (фиг. 6). Надлежитъ уголъ ABC раздѣлить на три равныя части.

Возьми на BC какую ниесть точку C; и на опредѣленной прямой BC составь равносторонный треугольникъ BDC*; и раздѣли уголъ DBC по поламъ *1.
прямою BE*. Говорю, что прямыми BD, BE уголъ *10.
прямой ABC раздѣленъ на три равныя части.

Поелику уголъ DBC есть двѣ трети прямаго*; *сл 3, (17)

(*) Elémens de Géométrie, avec des notes; par A. M. Legendre. И еще: Nouvelle théorie des Parallèles, avec un Appendice.

(**) Nouveau développement de la partie élémentaire des Mathématiques, par Bertrand, T. II.

и уголъ DBC раздѣленъ по поламъ: то каждый изъ угловъ CBE, EBD есть треть прямаго, то есть угла ABC; слѣдственно и остальной уголъ DBA есть треть прямаго.

Итакъ прямой уголъ ABC раздѣленъ на три равные угла прямыми BE, BD. ч. и с. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ F.

Всѣ углы внутри всякой прямолинейной фигуры, вмѣстѣ съ четырьмя прямыми, равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько въ фигурѣ сторонъ.

Пусть будетъ ABCDE (фиг. 7) прямолинейная фигура. Говорю, что всѣ углы внутри фигуры ABCDE, вмѣстѣ съ четырьмя прямыми, равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько въ ABCDE сторонъ.

Внутри фигуры ABCDE возьми какую ниесть точку F; и протяни FA, FB, FC, FD, FE.

Итакъ фигура ABCDE раздѣлена на столько треугольниковъ, сколько въ ней сторонъ. И поелику всякаго треугольника всѣ три угла равны двумъ
32. прямымъ: то каждаго изъ треугольниковъ ABF, FBC, CFD, DFE, EFA всѣ три угла равны двумъ прямымъ; а посему всѣ углы сихъ треугольниковъ равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько всѣхъ треугольниковъ. Треугольниковъ же столько, сколько сторонъ фигуры; посему всѣ углы сихъ треугольниковъ равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько сторонъ въ фигурѣ ABCDE. Но сіи углы треугольниковъ равны угламъ внутри фигуры, вмѣстѣ съ углами около точки F,

которая есть общая вершина сихъ треугольниковъ; углы же около точки F равны четыремъ прямымъ*: чего ради всѣ углы внутри фигуры ABCDE, вмѣстѣ съ четырьмя прямыми, равны столько разъ двумъ угламъ прямымъ, сколько сторонъ въ фигурѣ ABCDE. ч. и д. н. *слѣд: 15.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ G.

(18) Всякій четыреугольникъ, имѣющій противулежащія стороны взаимно равныя, есть параллелограммъ.

Пусть будетъ четыреугольникъ AD (ф. пр. 33), имѣющій противулежащія стороны взаимно равныя, то есть AC равную DB, а AB равную DC. Говорю, что AD есть параллелограммъ, то есть, что AC параллельна къ DB, а AB параллельна къ DC.

Протяни BC.

Поелику AC равна DB, а BC общая, то двѣ прямыя AC, CB равны двумъ прямымъ DB, BC; и основаніе AB равно основанію DC: посему уголъ ACB равенъ углу CBD*; они же суть и накосьлежащіе: чего ради AC параллельна къ DB*. Подобно докажемъ, что и AB параллельна къ CD. Слѣдственно ABDC есть параллелограммъ*. *8. *27. *опр. 36

Итакъ всякій четыреугольникъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что квадраты, прямоугольники, ромбы и ромбоиды суть параллелограммы.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ H.

Всякій четыреугольникъ, имѣющій противулежащіе углы взаимно равные, есть параллелограммъ.

Пусть будетъ четыреугольникъ ABCD (ф. 8), имѣющій противулежащіе углы взаимно равные, то есть уголъ A равный углу C, а уголъ B углу D. Говорю, что четыреугольникъ ABCD есть параллелограммъ, то есть, что AB параллельна къ DC, а AD параллельна къ BC.

Поелику уголъ A равенъ углу C, а уголъ D равенъ углу B; то два угла A, D, равны двумъ угламъ B, C. Но всѣ четыре угла A, D, B, C равны четыремъ угламъ прямымъ: посему два угла A, D равны двумъ угламъ прямымъ; слѣдственно AB
28 параллельна къ DC. Подобно докажемъ, что и AD параллельна къ BC. Слѣдственно ABCD есть
опр.36 параллелограммъ.

Итакъ всякій четыреугольникъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что четыреугольникъ, имѣющій всѣ четыре угла прямые, есть параллелограммъ.

(19) Клавій, Р. Симсонъ и другіе прибавляютъ къ доказанному Эвклидомъ случаю еще слѣдующіе два:

Пусть параллелограммовъ противулещащія основаніямъ стороны имѣютъ общую точку D, (ф. 9); то сходно съ первымъ случаемъ докажемъ, что треугольникъ ABD равенъ треугольнику DCE. Придай обще треугольникъ DBC: посему параллелограммъ AC равенъ параллелограмму BE.

Пусть еще параллелограммовъ противулежащія основаніямъ стороны имѣютъ общую часть ED (ф. 10); то сходно съ первымъ же случаемъ докажемъ, то AD равна EF. Отними обще ED: посему остальная AE равна остальной DF; и треугольникъ ABE
8. равенъ треугольнику DCF. Придай обще тра-

цію BCDE; посему параллелограммъ AC равенъ параллелограмму BF.

(20) Слѣдствіе. Такъ же докажется, что естьли параллелограммъ и треугольникъ стоятъ на равныхъ основаніяхъ и между тѣмиже параллельными; то параллелограммъ есть двукратный треугольника.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ К.

(21) Изъ равныхъ прямыхъ квадраты суть равные: И равные квадраты суть изъ равныхъ прямыхъ.

Пусть будутъ равныя прямыя AB, CD (ф. 11). Говорю, что квадраты изъ AB, CD суть равные.

Изъ AB, CD напиши квадраты AE, CG*; и протяни FB, HD. *46.

Поелику AB равна AF*, и CD равна CH*; но AB равна CD: посему и AF равна CH. Итакъ, поелику двѣ прямыя AB, AF равны двумъ прямымъ CD, CH; и уголъ A равенъ углу C*: посему и основаніе равно основанію; и треугольникъ ABF равенъ треугольнику CDH*. Но треугольника ABF есть двукратный квадратъ AE*, а треугольника CDH двукратный квадратъ CG: посему квадратъ AE равенъ квадрату CG*. *опр.30. *акс.10. *4. *34. *акс.6.

Но пусть будетъ квадратъ AE, (ф. 12) то есть изъ прямой AB, равенъ квадрату AC, то есть изъ прямой AD. Говорю, что и AB равна AD.

Помѣсти квадраты AE и AC при углѣ A, такъ чтобы FA была впрямъ съ AD; то и AB будетъ впрямъ съ AG*. Протяни поперечники FB, GD и прямыя FG, BD. *D.

Поелику квадратъ AE равенъ квадрату AD; то и половина равна половинѣ, то есть треугольникъ ABF треугольнику AGD. Придай обще треугольникъ BAD; посему цѣлый треугольникъ FBD равенъ цѣлому треугольнику GBD: и они суть на томъже основаніи DB. А равные треугольники, стоящіе на томъже основаніи, суть между тѣмиже параллельными*; посему
*39. DB параллельна къ GF. Поелику же прямоугольный треугольникъ AFB есть равнобедренный; то уголъ
сл.2,(17). AFB есть половина прямаго. Потому же и уголъ ADG есть половина прямаго. Чего ради уголъ DFB равенъ углу FDG; они же суть и накосьлежащіе:
28. посему FB параллельна къ GD. А доказано, что и GF параллельна къ DB; посему четыреугольникъ
опр.36. FBDG есть параллелограммъ; а посему FB равна
34. GD. И поелику уголъ AFB равенъ углу ADG, по доказанному; и прямой уголъ FAB равенъ прямому
акс.10. DAG; то треугольники FAB, AGD имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, каждый каждому; они же имѣютъ и одну сторону равную одной сторонѣ, кои противулежатъ равнымъ угламъ, то есть FB равную GD: посему и прочія двѣ стороны равны прочимъ двумъ сторонамъ, каждая каж-
26. дой: а посему AB равна AD.

Итакъ изъ равныхъ прямыхъ, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ВТОРОЙ.

(22) Слѣдствіе. Оттуда же явствуетъ, что естьли прямая линія разсѣчена по поламъ; то квадратъ изъ цѣлой равенъ четырежды взятому квадрату изъ половины.

(23) Сіе предложеніе есть одинъ случай слѣдующаго:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

Во всякомъ треугольникѣ квадратъ изъ стороны, противулежащей острому углу, меньше квадратовъ изъ прочихъ двухъ сторонъ, содержащихъ оный острый уголъ, двукратнымъ прямоугольникомъ, содержимымъ въ одной изъ сторонъ около остраго угла, на которую, продолженную буде нужно, падаетъ проведенная отъ вершины противулежащаго угла перпендикулярная, и въ прямой при остромъ углѣ, которую перпендикулярная отнимаетъ.

Пусть будетъ ABC (ф. 13, 14 и 15) треугольникъ, имѣющій уголъ при B острый; и отъ точки A пусть будетъ проведена перпендикулярная къ BC, продолженной буде нужно, прямая AD. Говорю, что квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB, BA двукратнымъ прямоугольникомъ въ CB, BD.

Поелику при прямой BC, на которую падаетъ перпендикулярная, уголъ при B есть острый, то уголъ при C будетъ или острый, или тупой, или прямой.

Пусть будетъ уголъ при C острый (ф. 13). Поелику же и уголъ при B острый, то перпендикулярная отъ A къ BC проведенная упадетъ внутри треугольника. Пусть она упадетъ какъ AD.

И поелику прямая BC разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ D; то прямоугольникъ, *атакъ далѣе, какъ доказано у Эвклида.*

Но пусть будетъ уголъ при C тупой (ф. 14): посему перпендикулярная, отъ A къ BC проведенная, упадетъ внѣ угла ACB на продолженіе BC. Продолжи BC къ D, и пусть перпендикулярная упадетъ какъ AD.

И поелику прямая BD разсѣчена какъ ниесть въ точкѣ C; то квадраты изъ CB, BD равны двукратному прямоугольнику въ CB, BD вмѣстѣ
7. съ квадратомъ изъ DC. Разсуждая потомъ какъ и въ первомъ случаѣ, докажемъ, что квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ CB, BA двукратнымъ прямоугольникомъ въ CB, BD.

Пусть же уголъ при C будетъ прямой (ф. 15): посему перпендикулярная отъ A къ BC проведенная будетъ самая AC; и прямая, которую отнимаетъ перпендикулярная при остромъ углѣ, будетъ самая BC.

И поелику квадраты изъ AC, CB равны квадрату
47,1. изъ AB, ибо уголъ при C прямой; придай обще квадратъ изъ BC: посему квадратъ изъ AC вмѣстѣ съ двукратнымъ квадратомъ изъ CB, равенъ квадратамъ изъ AB, BC. Итакъ квадратъ изъ AC меньше квадратовъ изъ AB, BC двукратнымъ изъ CB, то есть двукратнымъ прямоугольникомъ въ CB, BD.

Итакъ во всякомъ треугольникѣ, и проч ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ B.

Ежели въ треугольникѣ квадратъ изъ одной стороны больше квадратовъ изъ прочихъ двухъ сторонъ; то уголъ содержимый сими сторонами будетъ тупой: А естьли меньше, то острый.

Пусть будетъ треугольникъ ABC (ф. 15), въ коемъ квадратъ изъ AB пусть, во первыхъ, будетъ больше квадратовъ изъ AC, CB. Говорю, что уголъ ACB тупой.

Буде же не такъ; то уголъ ACB или прямой, или острой. Но уголъ ACB не будетъ прямой; ибо квадратъ изъ AB былъ бы равенъ квадратамъ изъ AC, CB*: а онъ не равенъ; посему уголъ ACB *47.I.
не прямой. И уголъ ACB не острой; ибо квадратъ изъ AB былъ бы меньше квадратовъ изъ AC, CB*: *A.
а онъ не меньше; посему уголъ ACB не острой. А доказано, что и ни прямой: слѣдственно уголъ ACB есть тупой.

Но пусть квадратъ изъ AB будетъ меньше квадратовъ изъ AC, CB; то подобно докажемъ, что уголъ ACB не прямой, и ни тупой; слѣдственно острый.

Итакъ, ежели въ треугольникѣ, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ТРЕТЬЕЙ.

(24) Опредѣленіе. А неравные круги суть тѣ, коихъ поперечники неравны.

Эвклидово опредѣленіе, равно и сіе легко доказать чрезъ наложеніе, какъ то всякому видѣть можно.

(25) Опредѣленіе. Подобныя дуги суть тѣ, на которыхъ стоящіе углы при центрахъ или при окружностяхъ взаимно равны.

(26) Слѣдствіе. Чрезъ точку, взятую на окружности круга, можетъ проведена быть одна токмо касательная къ нему прямая.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(27) Отъ точки взятой внѣ круга могутъ проведены быть къ нему двѣ касательныя, одна по одну сторону поперечника проходящаго чрезъ оную точку, а другая по другую; и сіи двѣ касательныя прямыя суть взаимно равны. Болѣе же двухъ касательныхъ отъ той точки провести не можно.

Пусть будетъ взята точка A (ф. 16) внѣ круга BCD. Говорю, что предлагаемое справедливо.

Отъ точки A проведи касательную AB къ кругу BCD, сдѣлавъ тоже строеніе, какъ въ предъидущемъ предложеніи; и продолжи еще FD къ H; и протяни EKH, AK: то подобно докажемъ, что и AK есть касательная. И поелику квадраты изъ AB, BE равны
47,I. квадрату изъ AE, ибо уголъ ABE есть прямой; и квадрату изъ AE равны квадраты изъ AK, KE, по той же причинѣ: посему квадраты изъ AB, BE равны квадратамъ изъ AK, KE. Но квадратъ изъ EB равенъ кваа-
K,I. драту изъ EK, ибо EB равна EK; посему и остальной квадратъ изъ AB равенъ остальному изъ AK;
K,I. слѣдственно и AB равна AK.

Говорю еще, что отъ той же точки A болѣе двухъ касательныхъ къ кругу провести не можно.

Ибо пусть, буде возможно, проведена будетъ третья AC; протяни EC: посему уголъ ACE есть прямой. Но и уголъ AKE есть прямой: а посему уголъ
21,I. ACE равенъ углу AKE, что невозможно. Чего ради AC не есть касательная къ кругу. Тоже докажется и о всякой другой, кромѣ двухъ прямыхъ AB, AK.

Итакъ отъ точки взятой, и проч. ч. и д. н.

(28) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли прямая касается къ кругу, и проведена будетъ отъ центра круга перпендикулярная къ касательной; то сія перпендикулярная упадетъ на прикосновеніе.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ B.

(29) Четыреугольника въ кругѣ ежели одна сторона продолжится, то внѣшный уголъ равенъ внутреннему противулежащему.

Пусть будетъ кругъ ABCD (ф. 17), и въ немъ четыреугольникъ ABCD; и пусть одна его сторона BC продолжена будетъ къ E. Говорю, что внѣшный уголъ DCE равенъ внутреннему противулежащему DAB.

Поелику два угла DCE, DCB равны двумъ угламъ прямымъ*; а и два угла DAB, DCB равны двумъ *13,1.
прямымъ*: то два угла DCE, DCB равны двумъ *22.
угламъ DAB, DCB. Отними обще уголъ DCB: посему остальной уголъ DCE равенъ остальному DAB.

Итакъ четыреугольника, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ C.

(30) Ежели чрезъ средину дуги круга, стягиваемой прямою, проведена будетъ касательная къ кругу; то она параллельна къ стягивающей прямой: И естьли проведена будетъ параллельная къ ней, то она касательна къ кругу.

Въ кругѣ ABC (ф. 18) пусть будетъ прямая BC, стягивающая дугу BAC; и чрезъ средину A дуги

BAC пусть проведена будетъ касательная къ кругу прямая DAE. Говорю, что DAE параллельна къ BC.

Возьми круга ABC центръ F, и протяни FGA: то FGA перпендикулярна къ DE*. И поелику дуга BA равна дугѣ AC, то и уголъ BFA равенъ углу AFC*. Итакъ, поелику FB равна FC, а FG общая; то двѣ прямыя BF, FG равны двумъ прямымъ CF, FG; и уголъ BFG равенъ углу CFG: посему* и основаніе равно основанію, и треугольникъ равенъ будетъ треугольнику, и прочіе углы равны прочимъ угламъ, каждый каждому, кои противулежатъ равнымъ сторонамъ; а посему уголъ BGF равенъ углу CGF. Чего ради каждый изъ угловъ, при G есть прямой*. Но и каждый изъ угловъ при A есть прямой: посему уголъ BGF равенъ углу DAF: слѣдственно BC параллельна къ DE*.

*18. *27. *4. *опр. 10, 1. *28, 1.

Но пусть будетъ DAE параллельна къ BC. Говорю, что DAE касательна къ кругу.

Ибо, сдѣлавъ тоже строеніе, такъ же докажемъ, что углы при G суть прямые. И поелику DE параллельна къ BC, и на нихъ падаетъ AF; то внѣшный уголъ BGF равенъ внутреннему противулежащему DAF*: но уголъ BGF прямой; посему и уголъ DAF прямой; а посему DA перпендикулярна къ FA; слѣдовательно и касательна къ нему*.

*29, 1. *слѣд. 16.

Итакъ, ежели чрезъ средину, и проч. ч. и д. н.

(31) Слѣдствіе. Естьли внѣ круга взята будетъ какая ниесть точка, и отъ нея на кругъ упадутъ сколько ниесть прямыхъ, пересѣкающихъ оный: то прямоугольникъ, содержимый въ одной цѣлой прямой и въ ея внѣшнемъ отрѣзкѣ, равенъ прямоугольнику,

содержимому въ другой цѣлой прямой и во внѣшнемъ ея отрѣзкѣ. Ибо, проведя еще, отъ той же самой точки прямую касательную, будетъ каждый изъ помянутыхъ прямоугольниковъ равенъ квадрату изъ касательной.

КЪ КНИГѢ ЧЕТВЕРТОЙ.

(32) Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, что сторона квадрата описаннаго около круга, равна поперечнику сего круга.

(33) Слѣдствіе. Естьли въ кругѣ вписанъ квадратъ, и около тогоже круга описанъ другой; то описанный есть половина вписаннаго.

(34) Слѣдствіе. Естьли протянуть прямыя AE, EC, CA, то въ кругѣ будетъ вписанъ треугольникъ равносторонный и равноугольный; какъ то всякому легко доказать можно.

(35) Опредѣленіе. Многоугольники правильными называются тѣ, кои суть равносторонные и равноугольные.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ A.

Естьли въ кругѣ вписанъ правильный многоугольникъ; то вписать въ томъ же другой правильный многоугольникъ, вдвое больше сторонъ имѣющій.

Въ кругѣ ABCDE (ф. пред. 10, кн. XII) пусть будетъ вписанъ правильный многоугольникъ ABCD. Надлежитъ въ томъ же кругѣ ABCD вписать другой правильный многоугольникъ, вдвое больше сторонъ имѣющій.

Дуги AB, BC, CD, DA, стягиваемыя сторонами вписаннаго многоугольника, раздѣли по поламъ въ
30,III. точкахъ E, F, G, H; и протяни AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Говорю, что многоугольникъ AEBFCGDH есть правильный.

Поелику дуга AE равна дугѣ EB, то дуга AB есть двукратная дуги AE. Подобно докажемъ, что и дуга AD есть двукратная дуги AH. Но дуга AB равна
28,III. дугѣ AD, ибо прямая AB равна прямой AD; посему и дуга AE равна AH; а посему и прямая AE равна
29,III. прямой AH. Подобно докажемъ, что и каждая изъ прочихъ прямыхъ EB, BF, FC, CG, GD, DH равна прямой AE или AH. Чего ради многоугольникъ AEBFCGDH есть равносторонный. Говорю же, что онъ и равноугольный. Ибо, какъ дуга AH равна дугѣ EB, придай обще дугу BCH; посему дуга BCA равна дугѣ EBH. Но на дугѣ BCA стоитъ уголъ AEB, а на дугѣ EBH уголъ HAE: посему уголъ HAE равенъ
27,III. углу BEA. Подобно докажемъ, что и каждый изъ угловъ, кои при B, F, C, G, D, H, равенъ углу при A или E. Чего ради многоугольникъ AEBFCGDH есть равносторонный. А доказано, что и равноугольный; слѣдственно онъ правильный. Притомъ имѣетъ число сторонъ вдвое больше, нежели многоугольникъ ABCD. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Поелику въ кругѣ можно вписать правильный четыреугольникъ, то есть квадратъ, также пяти, шести и пятнадцати угольникъ, то можно вписать, начиная отъ четыреугольника: восьми, шестнатцати, тридцати двухъ, и проч. угольникъ; начиная отъ пятиугольника: десяти, двадцати, и проч. угольникъ; начиная отъ шести-

угольника: двѣнадцати, двадцати четырехъ, и проч. угольникъ; и наконецъ, начиная отъ пятнадцати-угольника: тридцати, и проч. угольникъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ B.

Естьли въ кругѣ вписанъ правильный многоугольникъ; то описать около сего круга другой, столько же сторонъ имѣющій, правильный многоугольникъ.

Въ кругѣ ABCDE (ф. пр. 12) пусть будетъ вписанъ правильный многоугольникъ; и пусть точки A, B, C, D, E будутъ вершины угловъ вписаннаго многоугольника: итакъ дуги AB. BC, CD, DE, EA взаимно равны*. *28, III.
Чрезъ A, B, C, D, E проведи касательныя къ кругу прямыя GH, HK, KL, LM, MG; и возьми круга ABCDE центръ F; и протяни FB, FK, FC, FL, FD. Разсуждая потомъ, такъ какъ предложено о пятиугольникѣ*, докажемъ, что многоугольникъ GHKLM *въ 12.
есть равносторонный и равноугольный, то есть правильный ч. и с. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что упомянутые въ слѣдствіи предъидущаго предложенія многоугольники можно описывать около круга.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ C.

Въ данномъ правильномъ многоугольникѣ вписать кругъ.

Пусть будетъ ABCDE (ф. пр. 13) данный правильный многоугольникъ. Надлежитъ въ многоугольникѣ ABCDE вписать кругъ.

Раздѣли каждый изъ угловъ BCD, CDE по по-
9,I. ламъ прямыми CF, DF, кои пусть встрѣтятся
въ F; и протяни FB, FA, FE; и отъ F проведи, пер-
пендикулярныя къ AB, BC, CD, DE, EA, прямыя
12,I FG, FH, FK, FL, FM: то, разсуждая такъ какъ
въ13 и при пятиугольникѣ, докажемъ, что каждый
изъ остальныхъ угловъ ABC, BAE, AED раздѣленъ
по поламъ прямыми BF, FA, FE; и что прямыя
FG, FH, FK, FL, FM всѣ взаимно равны. И по-
тому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной
изъ тѣхъ прямыхъ написанный, будетъ касатель-
ный ко всѣмъ сторонамъ многоугольника, и бу-
детъ кругъ вписанный. Напиши оный, какъ GHKLM.
Итакъ въ данномъ правильномъ многоугольникѣ впи-
санъ кругъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что прямыя, про-
водимыя отъ центра круга въ правильномъ мно-
гоугольникѣ вписаннаго, къ вершинамъ онаго, раздѣ-
ляютъ углы его по поламъ.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

Около даннаго правильнаго многоугольника опи-
сать кругъ.

Пусть будетъ ABCDE (фиг. пр. 14) данный
правильный многоугольникъ. Надлежитъ около
многоугольника ABCDE описать кругъ.

Раздѣли опять каждый изъ угловъ BCD, CDE по
поламъ прямыми CF, DF, кои пусть встрѣтятся
въ F; и протяни FB, FA, FE: то по причинѣ, что
и каждый изъ остальныхъ угловъ CBA, BAE, AED
раздѣленъ по поламъ прямыми FB, FA, FE, докажемъ

такъ же какъ и при пятиугольникѣ*, что прямыя FA, FB, FC, FD, FE всѣ взаимно равны. И потому кругъ, изъ центра F и разстояніемъ одной изъ сихъ прямыхъ написанный, пройдетъ чрезъ вершины всѣхъ угловъ многоугольника, и будетъ кругъ описанный. Напиши оный, какъ ABCDE. *въ 14.

Итакъ около даннаго правильнаго многоугольника описанъ кругъ. ч. и с. н.

Слѣдствіе. 1. Отсюда явствуетъ, что прямыя, проводимыя отъ центра круга описаннаго около правильнаго многоугольника, къ вершинамъ угловъ его, раздѣляютъ сіи углы по поламъ.

Слѣдствіе 2. И поелику сіе доказано и о кругѣ вписанномъ: то явно, что круговъ описаннаго около правильнаго многоугольника и вписаннаго въ немъ, центръ есть тотъже.

КЪ КНИГѢ ПЯТОЙ.

(36) Когда говорится, что величина измѣряетъ другую или измѣряется другою; то всегда разумѣть должно, что измѣряетъ или измѣряется *безъ остатка*.

(37) Опредѣленіе. Когда двѣ бо́льшія величины равно измѣряются двумя меньшими, каждая каждою; то есть, одну бо́льшую одна меньшая измѣряетъ столько разъ, сколько другую бо́льшую другая меньшая: то большія называются равнократными меньшихъ, а меньшія равночастными большихъ. Тоже разумѣется о трехъ и болѣе величинахъ, измѣряемыхъ равномногими меньшими.

(38) Подъ именемъ зависимости величинъ по ихъ количеству разумѣть, кажется, должно всякое ихъ сравненіе. Напримѣръ, когда изслѣдывается, чѣмъ или во сколько одна другой больше, или меньше; равна ли одна величина другой или неравна, и проч. Клавій, Валлисъ (*) и нѣкоторые другіе Геометры изъясняютъ опредѣленіе отношенія иначе.

(39) Опредѣленіе. Величины, имѣющія отношеніе, называются членами онаго; первая предъидущимъ, а вторая послѣдующимъ.

(40) Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D; и пусть величинъ A, C будутъ *какія нибудь* равнократныя E, F, и величинъ B, C *какія нибудь* равнократныя G, H; и пусть величины E, G, F, H будутъ таковы, что естьли E больше G, то и F больше H; и естьли E равна G, то и F равна H; и естьли E меньше G, то и F меньше H: или иначе: пусть будутъ два неопредѣленныя цѣлыя числа m, n; и пусть величины A, B, C, D будутъ таковы, что естьли mA (то есть m разъ взятая величина A) больше nB, то и mC больше nD; и естьли mA равна nB, то и mC равна nD; и естьли меньше, то меньше: въ такомъ случаѣ говорится, что отношеніе A къ B есть тоже съ отношеніемъ C къ D, или что какъ A къ B, такъ C къ D.

(41). Естьли изъ величинъ A, B, C, D, будетъ mA больше nB, а mC не больше nD: то

(*) J Wallis opera Mathematica. Vol. I, Cap. 25, 29 et 30, et Vol. II, Cap. 19.

говорится, что A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ D; или C къ D имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ B. При чѣмъ замѣтимъ, что m, n могутъ быть *нѣкія*, то есть опредѣленныя числа. На примѣръ, естьли 2A больше 3B, а 2C не больше 3D, то A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ D, хотя бы при другихъ кратствованіяхъ сего и не было.

ОБЩЕЕ ПРИМѢЧАНІЕ КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЯМЪ 3, 4, 5, и 7.

Поелику на сихъ опредѣленіяхъ основывается вся теорія величинъ пропорціональныхъ, то нужно еще войти въ подробнѣйшее оныхъ объясненіе. Пусть будутъ двѣ однородныя величины A, B. Естьли сіи величины равны; то онѣ всегда имѣютъ отношеніе, ибо одна изъ нихъ взятая кратно будетъ больше другой. Естьли же величины A, B не равны; то меньшая взятая кратно или сдѣлается когда либо большею большей, или нѣтъ. Естьли сдѣлается или, что все равно, естьли можетъ сдѣлаться; то величины A, B имѣютъ отношеніе: естьли же нѣтъ, то не имѣютъ. Слѣдственно уголъ, содержимый касательною къ кругу и окружностію его, къ прямолинейному углу не имѣетъ отношенія. (Равнымъ образомъ точка къ линіи, линія къ поверхности, нуль къ нулю, нуль и конечная величина къ безконечной не имѣютъ отношенія). Напротивъ того окружный уголъ (то есть, содержимый дугами равныхъ круговъ обращенными въ одну сторону) къ прямолинейному углу имѣетъ отношеніе: ибо первой можетъ быть равенъ или прямому, или тупому;

или острому, какъ доказалъ Проклъ (*). Равнымъ образомъ поперечникъ круга къ его окружности, квадратъ изъ поперечника къ кругу, имѣютъ отношеніе: ибо три поперечника меньше окружности, а четыре больше оной, какъ доказалъ Архимедъ; квадратъ изъ полупоперечника меньше круга, а квадратъ изъ поперечника больше круга, какъ то легко доказать изъ предлож. 6 и 7 кн. IV. Пусть еще будутъ двѣ величини C, D, имѣющія взаимное отношеніе. Естьли сравнимъ отношеніе A къ B съ отношеніемъ C къ D: то оныя будутъ или тѣже, или нѣтъ. Когда равнократныя, взятыя по опредѣленію 5му, имѣютъ свойство въ немъ изъясненное; то отношенія суть тѣже или равныя, а въ противномъ случаѣ суть неравныя.

Изъ сего слѣдуетъ, что естьли величины A, B, C, D предполагаются пропорціональными или доказываются таковыми: то ни въ какомъ случаѣ не

(*) И дѣйствительно, пусть будетъ уголъ ABC (ф. 19) прямой, и пусть взяты будутъ прямыя BA, BC равныя, и на нихъ написаны полукружія ADB, BEC, одно внѣ угла, а другое внутрь онаго.

Поелику полукружіе ADB равно полукружію BEC, ибо AB равна BC; то и уголъ DBA равенъ углу EBC. Придай обще смѣшенный уголъ ABE; посему и цѣлый уголъ DBE равенъ цѣлому ABC; то есть окружный уголъ DBE равенъ прямому.

Но пусть уголъ ABC будетъ тупой. Сдѣлавъ такое же строеніе, подобно докажемъ, что уголъ DBE равенъ тупому углу ABC.

Пусть, наконецъ, уголъ ABC будетъ острый. Сдѣлавъ тоже строеніе, подобно же докажемъ, что уголъ DBA равенъ углу EBC. Отними обще уголъ EBA; посему и остальной уголъ DBE равенъ остальному ABC. ч. и д. н.

можетъ быть, когда изъ ихъ кратныхъ первая больше второй, чтобы третья была не больше четвертой; а когда равна, чтобы была не равна; а когда меньше, чтобы была не меньше; ибо сіе противно опредѣленію 5. Но естьли A, B, C, D предполагаются или доказываются неимѣющими тогоже отношенія, то сіе уже означаетъ, что суть *нѣкія* кратныя, кои имѣютъ свойство показанное въ опредѣленіи 7мъ; слѣдственно не можно будетъ ни сказать, ни доказать о величинахъ A, B, C, D, что по взятіи ихъ равнократныхъ, по *какому ниесть* кратствованію, сіи кратныя *всегда* будутъ или купно въ избыткѣ, или купно въ равенствѣ, или купно въ недостаткѣ. Изъ сего явствуетъ, что величины удовлетворяющія опредѣленію 5му не могутъ уже удовлетворять 7му, а удовлетворяющія 7му не могутъ удовлетворять 5му.

Сообразивъ все выше сказанное, нельзя кажется не согласиться, что напрасно говорятъ, будто ученіе Эвклидово о пропорціяхъ принужденно и не прямо, и будто нѣтъ достаточныхъ признаковъ, по которымъ бы можно отличить величины, имѣющія тоже отношеніе, отъ величинъ, имѣющихъ большее или меньшее; то есть величины опредѣленія 5го отъ величинъ опредѣленія 7го; будто Эвклидъ величины послѣдняго отъискиваетъ на удачу, и проч.

(42) Изъ предъидущаго примѣчанія видно, что слова: *тоже*, *большее* или *меньшее* (отношеніе), имѣютъ совсѣмъ различный смыслъ отъ того, въ коемъ онѣ приемлются обыкновенно, ибо тутъ онѣ не болѣе значатъ, какъ простое наименованіе

свойствъ, излагаемыхъ въ опредѣленіяхъ 5мъ и 7мъ. Слѣдственно подобіе или тожество отношеній, есть не что иное, какъ когда величины оныхъ имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи 5мъ. И поелику таковыя величины, то есть, имѣющія взаимно тоже отношеніе, называются для краткости пропорціональными, то для краткости же названо тожество отношеній пропорціею.

(43) Опредѣленіе a. Двѣ величины называются обратно пропорціональными другимъ двумъ величинамъ, когда одна изъ первыхъ къ одной изъ вторыхъ имѣетъ тоже отношеніе, что другая изъ вторыхъ къ другой изъ первыхъ.

Опредѣленіе b. Величины называются непрерывно пропорціональными, когда первая ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что вторая къ третьей, а вторая къ третьей тоже, что третья къ четвертой, итакъ далѣе.

Изъ опредѣленій 10го и 11го явно, что отношеніе удвоенное, утроенное и проч. не означаетъ тоже, что двукратное, трекратное, и проч.

(44) Разумѣется: *непрерывно.*

(45) Опредѣленіе. Ежели будетъ одинъ рядъ величинъ, имѣющихъ взаимное отношеніе, а другой рядъ отношеній тѣхъже съ отношеніями величинъ перваго ряда; то говорится, что первая величина къ послѣдней перваго ряда имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній втораго ряда.

На примѣръ: пусть будетъ рядъ величинъ A,B,C,D, и рядъ отношеній: M къ N; P къ Q; R къ S; и пусть будетъ отношеніе A къ B тоже съ отношеніемъ M къ N, и отношеніе B къ C тоже съ отношеніемъ P

къ Q, и еще отношеніе C къ D тоже съ отношеніемъ R къ S; то говорится, что A къ D имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній M къ N; P къ Q, и R къ S. Эвклидъ сіе опредѣленіе выражаетъ иначе. (См. опр. 5, кни. VI).

(46) Называются такожъ и сходственными членами.

(47) Пусть будутъ многія величины A, B, C, и имъ равномногія D, E, F, кои по двѣ въ каждомъ ряду суть въ томъже отношеніи, то отношенія, A къ C, и D къ E называются равномѣстными; (48) пропорція же: какъ A къ B такъ D къ E, и какъ B къ C такъ E къ F, именуется порядочною.

(49) Но естьли будутъ три величины A, B, C и другія равномногія D, E, F, имѣющія слѣдующія отношенія: какъ A къ B такъ E къ F; какъ B къ C такъ D къ E: то сія пропорція именуется обратною или смѣшенною.

По мнѣнію нѣкоторыхъ толкователей, послѣ опредѣленій можно еще помѣстить въ сей книгѣ слѣдующія аксіомы:

a. Какое отношеніе имѣетъ одна величина къ другой своего рода, такое отношеніе имѣетъ всякая данная величина къ нѣкоей величинѣ своего же рода. Иначе: ежели будутъ три величины, изъ коихъ двѣ первыя имѣютъ отношеніе; то всегда есть четвертая величина, къ коей третья имѣетъ тоже отношеніе, что и первая ко второй.

b. Равнократныя или равночастныя тогоже или равныхъ, суть и взаимно равны.

c. Равнократныя или равночастныя неравныхъ, суть и взаимно неравны.

(50) Слѣдствіе. Ежели первая величина второй, и третья четвертой будутъ равнократныя; пятая же будетъ равная второй, и шестая равная четвертой: то подобно докажется, что совокупленно, первая съ пятою второй, и третья съ шестою четвертой будутъ равнократныя. Сіе же докажется еще, ежели первая равна второй, а третья четвертой; пятая же второй и шестая четвертой равнократны.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(51) Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой: то и равнократныя первой и третьей будутъ ко второй и четвертой имѣть тоже отношеніе: И также величины первая и третья будутъ къ равнократнымъ второй и четвертой имѣть тоже отношеніе.

Пусть первая величина A (фиг. пр. 4) ко второй B имѣетъ тоже отношеніе, что и третья C къ четвертой D; и пусть, вопервыхъ, будутъ первой и третьей A, C равнократныя E, F. Говорю, что какъ E къ B, такъ F къ D.

Возьми величинъ E, F равнократныя K, L; а величинъ B, D равнократныя G, H. Здѣсь доказать
въ 4. можно какъ и въ предложеніи, что K, L суть равнократныя величинъ A, C. И поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и суть величинъ A, C равнократныя K, L, а величинъ B, D равнократныя G, H; посему естьли K больше G, то и L больше H; и естьли равна, то равна; и естьли меньше,
опр. 5. то меньше. Итакъ, поелику величинъ E, F равнократныя суть K, L, а величинъ B, D равно-

кратныя G, H; и доказано, что естьли K больше G, то и L больше H; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше: слѣдственно какъ E къ B, такъ F къ D*. *опр.5.

Естьли будутъ величинъ второй и четвертой B, D равнократныя G, H, то подобно докажемъ, что какъ A къ G, такъ C къ H.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

(52) Р. Симсонъ послѣ сего предложенія помѣщаетъ еще между прочимъ слѣдующія:

ПРЕДЛОЖЕНІЕ B.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ тоже отношеніе, что и третья къ четвертой; будетъ же первая больше второй: то и третья больше четвертой; а естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше.

Пусть будетъ какъ A къ B, такъ C къ D. Говорю, что ежели A больше B, то и C больше D; а естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше.

Возьми величинъ A, B, C, D равнократныя E, F, G, H.

И вопервыхъ пусть будетъ A больше B. Поелику A больше B, и величинъ A, B равнократныя суть E, F; то и E больше F*. И поелику полагается, *акс.с. какъ A къ B, такъ C къ D; и величинъ A, C равнократныя суть E, G, а величинъ C, D равнократныя суть F, H; и доказано, что E больше F: посему и G больше H*. Но G, H *опр.5. суть величинъ C, D равнократныя: посему и C больше D*. Слѣдственно естьли A больше B, *акс.с. то и C больше D. Подобно докажемъ, что естьли A

равна B, то и C равна D; и естьли меньше, то меньше.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ C.

Ежели будутъ четыре величины, изъ коихъ первая и третья равнократны, или равночастны, второй и четвертой, каждая каждой; то какъ первая ко второй, такъ третья къ четвертой.

Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D, (ф. 20) изъ коихъ первая A и третья C пусть, вопервыхъ, будутъ равнократны второй B и четвертой D, каждая каждой. Говорю, что какъ A къ B, такъ C къ D.

Величинъ A, C возьми равнократныя E, F; а величинъ B, D равнократныя G, H. И пусть, вопервыхъ, будетъ E больше G.

Поелику первая величина A второй B и третья C четвертой D суть равнократныя, и взяты первой величины и третьей равнократныя же E, F: посему
3. E, F суть равнократныя величинъ B, D. Но и G, H суть равнократныя величинъ B, D: Итакъ, ежели E есть бо́льшая кратная величины B, нежели G тойже B; то и F есть большая кратная величины D, нежели H тойже D; а естьли меньшая, то меньшая; ежели же равная, то равная. Но поелику E, по положенію, больше G, то E есть большая кратная величины B, нежели G тойже B; посему и F есть большая кратная величины D,
акс. с. нежели H тойже D; а посему F больше H. Слѣдственно естьли E больше G, то и F больше H.

Подобно докажемъ: что естьли E равна G, то и F равна H; и естьли меньше, то меньше. Итакъ, поелику величинъ A, C равнократныя суть E, F, а величинъ B, D равнократныя G, H; и доказано, что естьли E больше G, то и F больше H; и естьли равна, то равна; и естьли меньше, то меньше: слѣдственно какъ A къ B, такъ C къ D*. *опр.5.

Но пусть первая A и третья C будутъ равночастныя второй B и четвертой D, каждая каждой. Говорю, что какъ A къ B, такъ C къ D.

Поелику A, C суть равночастныя величинъ B, D; то B, D суть величинъ A, C равнократныя; слѣдственно, по доказанному уже, будетъ, какъ B къ A, такъ D къ C: и потому преложеніемъ, какъ A къ B, такъ C къ D*. *слѣд.4.

Итакъ, ежели будутъ четыре, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Ежели изъ четырехъ величинъ, первая равна второй, и третья равна четвертой; то такъ же докажется, какъ въ первомъ случаѣ предложенія, что какъ первая ко второй, такъ третья къ четвертой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ D.

Ежели изъ четырехъ величинъ пропорціональныхъ, первая есть кратная, или частная, второй; то и третья будетъ равнократная, или равночастная, четвертой.

Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D (ф. 21) пропорціональныя, то есть, какъ A къ B, такъ C

къ D; и пусть, вопервыхъ, будетъ A кратная величины B. Говорю, что и C есть равнократная величины D.

Возьми E равную A; и сколько кратна A, то есть E величины B, возьми столько кратную F величины D.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D; и величинъ B, D, второй и четвертой взяты равнократныя
A. E, F; то какъ A къ E, такъ C къ F. Но A равна
B. E, посему и C равна F. И поелику сколько E, то есть A есть кратная величины B, столько F есть кратная величины D; и F равна C: посему сколько A есть кратная величины B, столько и C есть кратная величины D.

Но пусть будетъ A частная величины B. Говорю, что и C есть равночастная величины D.

Поелику A есть частная величины B, то B есть кратная величины A. И поелику какъ A къ B, такъ C къ D; то преложеніемъ, какъ B къ A, такъ D
след. 4. къ C. Но B есть кратная величины A; чего ради, по доказанному, и D есть равнократная величины C; а посему A, C суть равночастныя величинъ B, D.

Итакъ, ежели изъ четырехъ, и проч. ч. и д. н.

(53) Слѣдствіе. Подобно докажемъ, что равныя величины къ равнымъ имѣютъ тоже отношеніе, взятыя попеременно.

(54) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что естьли отношенія величинъ суть тѣже или тожественны съ какими ниесть тѣмиже отношеніями; то оныя суть тѣже и взаимно.

(55) Слѣдствіе. 1. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, а третья къ четвертой имѣетъ тоже отношеніе, что пятая къ шестой; то подобно докажемъ, что первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Слѣдствіе. 2. Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, а третья къ четвертой большее, нежели пятая къ шестой; то первая ко второй и тѣмъ паче будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

(56) Слѣдствіе сіе весьма темно и, какъ кажется, неудовлетворительно доказано. Грегори оное доказываетъ такъ (*):

Естьли будетъ какъ AB къ BE, такъ CD къ DF; то отдѣленіемъ, какъ AE къ BE, такъ CF къ DF*: *17. а преложеніемъ, какъ BE къ AE, такъ DF къ CF*: *слѣд. 4. и совокупленіемъ, какъ AB къ AE, такъ CD къ CF, что и есть обращеніе отношеній пропорціи: какъ AB къ BE, такъ CD къ DF. Отсюда явствуетъ, и проч.

(57) То есть, сдѣлавъ преложеніе отношеній предположенной пропорціи: какъ B къ C, такъ E къ F.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ E.

(58) Отношенія сложенныя изъ тѣхъже отношеній, суть взаимно тѣже.

Пусть будетъ какъ A къ B, такъ C къ D; и какъ E къ F, такъ G къ H; и еще какъ K къ L,

(*) Euclidis quæ supersunt omnia. Oxoniæ. 1703.

A.	B.	E.	F.	K.	L
C.	D.	G.	H.	M.	N
O.		P.		Q.	R.
S.		T.		V.	X.

такъ M къ N. Говорю, что отношеніе сложенное изъ отношенія A къ B, и отношенія E къ F, и еще отношенія K къ L, есть тоже съ отношеніемъ сложеннымъ изъ отношенія C къ D, и отношенія G къ H, и еще отношенія M къ N.

Возьми какую ниесть величину O: и пусть будетъ какъ A къ B, такъ O къ P*; и какъ E къ F, такъ P къ Q; и еще какъ K къ L, такъ Q къ R. Возьми еще какую ниесть величину S; и пусть будетъ какъ C къ D, такъ S къ T; и какъ G къ H, такъ T къ V; и еще какъ M къ N, такъ V къ X.

*акс.а.

Поелику какъ A къ B, такъ C къ D: но какъ A къ B, такъ O къ P; а какъ C къ D, такъ S къ T: посему какъ O къ P, такъ S къ T*. Потому же какъ P къ Q, такъ T къ V; и какъ Q къ R, такъ V къ X. Итакъ четыре суть величины O, P, Q, R, и другія имъ равномногія S, T, V, X, взятыя по двѣ въ томъже съ ними отношеніи: посему, равномѣстно, какъ O къ R, такъ S къ X*. Но отношеніе O къ R называется сложеннымъ изъ отношеній A къ B, и E къ F, и K къ L*; а отношеніе S къ X называется сложеннымъ изъ отношеній C къ D, и G къ H, и M къ N: чего ради отношеніе сложенное изъ отношеній A къ B, и E къ F, и K къ L есть тоже съ отношеніемъ сложеннымъ изъ отношеній C къ D, и G къ H, и M къ N.

*11,V.

*22,V.

*(45).

Итакъ отношенія сложенныя, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что отношенія удвоенныя тѣхъже отношеній, или утроенныя, суть и взаимно тѣже.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ F.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то преложеніемъ, вторая къ первой имѣетъ меньшее отношеніе, нежели четвертая къ третьей: И ежели меньшее, то большее.

Пусть первая величина A (ф. 22) ко второй B имѣетъ большее отношеніе, нежели третья C къ четвертой D. Говорю, что преложеніемъ, B къ A имѣетъ меньшее отношеніе, нежели D къ C.

Вообрази величину E, которая къ B имѣетъ тоже отношеніе, что и C къ D*. *акс. а.

Итакъ A къ B имѣетъ большее отношеніе*, нежели E къ B: посему A больше E*; а посему E меньше A. Поелику же E меньше A, и B есть другая нѣкая величина; а таже величина къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели къ большей*: посему B къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ A. И поелику E къ B имѣетъ тоже отношеніе, что C къ D; то преложеніемъ, B къ E имѣетъ тоже отношеніе, что и D къ C*. Доказано же, что B къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ A; то есть B къ A имѣетъ меньшее отношеніе, нежели B къ E: чего ради B къ A имѣетъ меньшее отношеніе, нежели и D къ C*. *13. *10. *8. *след. 4. *13.

Подобно докажемъ, что естьли первая ко второй имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья къ четвертой: то преложеніемъ, вторая къ первой имѣетъ большее отношеніе, нежели четвертая къ третьей.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и. д. ы.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ G.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то и премѣненіемъ имѣетъ большее.

Пусть A (ф. 22) къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ D. Говорю, что и премѣненіемъ, A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ D.

Вообрази величину E, которая къ B имѣетъ тоже
акс.а. отношеніе, что и C къ D.

Итакъ A къ B имѣетъ большее отношеніе, не-
13. жели E къ B: и потому A больше E. Поелику же A больше E, а C есть другая нѣкая величина; то A
8. къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ C. И поелику E къ B имѣетъ тоже отношеніе, что и C къ D: то и премѣненіемъ, E къ C имѣетъ то-
слѣд:4. же отношеніе, что и B къ D. Доказано же, что A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ C: чего ради A къ C имѣетъ большее отношеніе;
13. нежели и B къ D.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ H.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то и совокупленно, первая со второю ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья съ четвертою къ четвертой.

Пусть AB (ф. 23) къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DE къ EF. Говорю, что и совокуплено, AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DF къ EF.

Вообрази величину GB, которая къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что и DE къ EF*. *акс. а.

Итакъ AB къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели GB къ BC*; а посему AB больше GB. При- *13.
дай обще BC; посему цѣлая AC больше цѣлой GC. Но BC есть другая нѣкая величина: посему AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели GC къ BC*. *8.
И поелику, по положенію, GB къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что DE къ EF; то, совокупленіемъ, GC къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что и DF къ EF*. *18.
Доказано же, что AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели GC къ BC: чего ради AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели и DF къ EF*. *13.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ K.

Ежели первая величина со второю ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья съ четвертою къ четвертой; то и отдѣленно, первая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой.

Пусть AC (фиг. 23) къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DF къ EF. Говорю, что и отдѣленно, AB къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DE къ EF.

Вообрази величину GC, которая къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что и DF къ EF.

Итакъ AC къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели GC къ BC: посему AC больше GC*. Отними обще *10.
BC; посему остальная AB больше остальной GB. Но BC есть другая нѣкая величина: посему AB къ BC имѣетъ

8. большее отношеніе, нежели GB къ BC. И поелику, по положенію, GC къ BC имѣетъ тоже отношеніе, что и DF къ EF: то, отдѣленіемъ, GB къ BC имѣетъ
17 тоже отношеніе, что и DE къ EF. Доказано же, что AB къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели GB къ BC: чего ради AB къ BC имѣетъ большее
13. отношеніе, нежели и DE къ EF.

Итакъ, ежели совокупленіемъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ L.

Ежели первая величина со второю ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья съ четвертою къ четвертой; то, обращеніемъ, первая со второю къ первой имѣетъ меньшее отношеніе, нежели третья съ четвертою къ третьей.

Пусть AB (фиг. 24) къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DE къ EF. Говорю, что, обращеніемъ, AB къ AC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели DE къ DF.

Поелику AB къ BC имѣетъ большее отношеніе, нежели DE къ EF: то, отдѣленіемъ, AC къ CB
K. имѣетъ большее отношеніе, нежели DF къ FE. Посему преложеніемъ, BC къ CA имѣетъ меньшее отношеніе.
F. нежели EF къ FD: чего ради совокупленіемъ, AB
H. къ AC имѣетъ меньшее отношеніе, нежели DE къ DF.

Итакъ, ежели первая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ M.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ, и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по двѣ по порядку, въ

большемъ отношеніи: то и равномѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будетъ сколько нибудь есть величинъ A, B, C (ф. 25), и другихъ имъ равномногихъ D,E,F, взятыхъ по двѣ въ большемъ отношеніи; а именно, A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E, а B къ C большее нежели E къ F. Говорю, что и равномѣстно, A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ F.

Вообрази величину G, которая къ C имѣетъ тоже отношеніе, что E къ F. Итакъ B къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели G къ C*: посему *13.
B больше G*. И поелику B больше G, а A *10.
есть другая нѣкая величина: то A къ B имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ G, то есть A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели A къ B. Полагается же, что A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E: чего ради тѣмъ паче A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E*. *сл 2,(55).

Вообрази еще величину H, которая къ G имѣетъ тоже отношеніе, что и D къ E. Итакъ A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ G; посему A больше H. Но C есть другая нѣкая величина: посему A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ C. И поелику D къ E имѣетъ тоже отношеніе, что и H къ G, а E къ F тоже что G къ C: то равномѣстно, D къ F имѣетъ тоже отношеніе, что H къ C*. Доказано же, что A *22.
къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ C: чего ради A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели и D къ F*. *13.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Ежели A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E; и будетъ G меньше B: то доказано, что тѣмъ паче A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ E. Изъ сего явствуетъ: что изъ пяти величинъ, естьли первая ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, и будетъ пятая меньше второй; то тѣмъ паче первая къ пятой имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ N.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ обратно, въ большемъ отношеніи: то и равномѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ три величины A, B, C (ф. 25), и другія равномногія имъ D, E, F, съ коими тѣ взятыя по двѣ обратно суть въ большемъ отношеніи; а именно: A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F, а B къ C большее нежели D къ E. Говорю, что и равномѣстно, A къ C имѣетъ большее отношеніе, нежели D къ F.

Вообрази величину G, которая къ C имѣетъ то-
акс.а. же отношеніе, что и D къ E. Итакъ B къ C
13. имѣетъ большее отношеніе, нежели G къ C: по-
10. сему B больше G; а посему G меньше B. Но A есть другая нѣкая величина: посему A къ G имѣетъ
8. большее отношеніе, нежели A къ B. Но A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели E къ F: чего ради тѣмъ паче A къ G имѣетъ большее отноше-
сл.2,(55). ніе, нежели E къ F.

Вообрази еще величину H, которая къ G имѣетъ тоже отношеніе, что и E къ F. Итакъ A къ G имѣетъ большее отношеніе, нежели H къ G*: по- *13.
сему A больше H*. Но C есть другая нѣкая ве- *10.
личина: посему A къ C имѣетъ большее отноше-
ніе, нежели H къ C*. Поелику же какъ D къ E, *8.
такъ G къ C; а какъ E къ F, такъ H къ G: то
равномѣстно, какъ D къ F, такъ H къ C*. Доказано *23.
же, что A къ C имѣетъ большее отношеніе, не-
жели H къ C: чего ради A къ C имѣетъ боль- *13.
шее отношеніе, нежели и D къ F*.

Итакъ, ежели будутъ три, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ O.

Ежели цѣлая величина къ цѣлой имѣетъ большее отношеніе, нежели отнятая отъ первой къ отнятой отъ другой; то и остальная къ остальной будетъ имѣть большее, нежели цѣлая къ цѣлой.

Пусть цѣлая AB (ф. пр. 19) къ цѣлой CD имѣетъ большее отношеніе, нежели отнятая AE къ отнятой CF. Говорю, что и остальная EB къ остальной FD будетъ имѣть большее отношеніе, нежели цѣлая AB къ цѣлой CD.

Поелику AB къ CD имѣетъ большее отношеніе, нежели AE къ CF: то и премѣненіемъ, BA къ AE имѣетъ большее отношеніе, нежели DC къ CF*. *G.
Но естьли величины имѣютъ большее отношеніе, то обращеніемъ будутъ имѣть меньшее*: посему AB *L.
къ EB имѣетъ меньшее отношеніе, нежели CD къ FD; и премѣненіемъ, AB къ CD имѣетъ меньшее отношеніе, нежели EB къ FD; то есть, остальная

ЕВ къ остальной FD имѣетъ большее отношеніе, нежели цѣлая АВ къ цѣлой CD.

Итакъ, ежели цѣлая величина, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ P.

Ежели будетъ сколько ниесть величинъ, и другихъ имъ равномногихъ; и перваго ряда величины къ величинамъ втораго будутъ имѣть непрерывно большее отношеніе: то всѣ величины перваго ряда, ко всѣмъ величинамъ втораго ряда, будутъ имѣть меньшее отношеніе, нежели первая къ первой, а большее, нежели послѣдняя къ послѣдней: такожъ большее, нежели всѣ перваго ряда кромѣ первой, ко всѣмъ втораго ряда кромѣ первой же.

Пусть будутъ величины A, B, C (ф. пр. 20), и другія имъ равномногія D, E, F; и пусть A къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ E, а B къ E большее нежели C къ F. Говорю, вопервыхъ, что всѣ A, B, C ко всѣмъ D, E, F имѣютъ большее отношеніе, нежели B, C къ E, F.

Поелику A къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ E: то и премѣненіемъ, A къ B боль-
G. шее, нежели D къ E, и совокупленіемъ, A, B къ B
H. большее нежели D, E къ E: и еще премѣненіемъ, A, B къ D, E большее нежели B къ E. Итакъ, поелику цѣлая A, B къ цѣлой D, E имѣетъ большее отношеніе, нежели отнятая B къ отнятой E: то и остальная A къ остальной D имѣетъ большее отношеніе, нежели цѣлая A, B къ цѣлой
O. D, E. Подобно докажется, что B къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели B, C къ E, F. Но, по

положенію, A къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ E: посему и тѣмъ паче A къ D имѣетъ большее отношеніе, нежели B, C къ E, F*: а посему премѣненіемъ A *сл. 3, (55).
къ B, C большее нежели D къ E, F; и совокупленіемъ A, B, C къ B, C большее нежели D, E, F къ E, F: и еще премѣненіемъ A, B, C къ D, E, F большее нежели B, C къ E, F.

Говорю же, что A, B, C къ D, E, F имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ D.

Поелику, по доказанному, цѣлая A, B, C къ цѣлой D, E, F имѣетъ большее отношеніе, нежели отнятая B, C къ отнятой E, F: то и остальная A къ остальной D имѣетъ большее отношеніе, нежели цѣлая A, B, C къ цѣлой D, E, F*, то есть, * о.
A, B, C къ D, E, F имѣетъ меньшее отношеніе, нежели A къ D.

Говорю еще, что A, B, C къ D, E, F имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ F.

Поелику B къ E имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ F: то премѣненіемъ, B къ C имѣетъ большее, нежели E къ F; и совокупленіемъ B, C къ C большее, нежели E, F къ F: и еще премѣненіемъ, B, C къ E, F большее, нежели C къ F. Но, по доказанному, A, B, C къ D, E, F имѣетъ большее отношеніе, нежели B, C къ E, F: чего ради тѣмъ паче A, B, C къ D, E, F имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ F.

Итакъ, ежели будетъ, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ Q.

Отношенія сложенныя изъ бо́льшихъ отношеній, суть больше сложенныхъ изъ меньшихъ.

Пусть имѣетъ A къ B большее отношеніе, нежели C къ D, а E къ F большее нежели G къ H, и K къ L большее нежели M къ N. Говорю, что отношеніе сложенное изъ отношенія A къ B, и отношенія E къ F, и еще отношенія K къ L, есть больше отношенія сложеннаго изъ отношенія C къ D, и отношенія G къ H, и еще отношенія M къ N.

A: B.	E: F.	K: L
C: D.	G: H.	M: N
O. P.	Q. R.	
S. T.	V. X.	

Возьми какую ниесть величину O: и пусть будетъ какъ A къ B, такъ O къ P*; и какъ E къ F, такъ P къ Q; и еще какъ K къ L, такъ Q къ R. Возьми еще какую ниесть величину S: и пусть будетъ какъ C къ D, такъ S къ T*; и какъ G къ H, такъ T къ V; и еще какъ M къ N, такъ V къ X.

*акс. а.

*акс. а.

Поелику A къ B имѣетъ большее отношеніе, нежели C къ D; но какъ A къ B, такъ O къ P, а какъ C къ D, такъ S къ T: посему O къ P имѣетъ большее отношеніе, S къ T*. Потому же и P къ Q имѣетъ большее отношеніе, нежели T къ V; и Q къ R имѣетъ большее отношеніе, нежели V къ X. Итакъ четыре суть величины O, P, Q, R, и другія имъ равномногія S, T, V, X, взятыя по двѣ въ большемъ отношеніи: посему и равномѣстно будутъ въ большемъ*; а посему O къ R имѣетъ большее отношеніе, нежели S къ X. Но O къ R есть

*11 и 13.

*м.

въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній A къ B, и E къ F, и K къ L*; а S къ X есть въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній C къ D, и G къ H, и M къ N: посему и отношеніе, сложенное изъ отношеній A къ B, и E къ F, и K къ L, есть больше отношенія сложеннаго изъ отношеній C къ D, и G къ H, и M къ N. *(45).

Итакъ отношенія сложенныя, и проч. ч. и д. н.

Слѣдствіе. Отношенія удвоенныя, или утроенныя, бо́льшихъ, суть большія.

КЪ КНИГѢ ШЕСТОЙ.

(59) Подобныя прямолинейныя фигуры называются подобно положенными, или подобно написанными изъ тѣхъ ихъ сторонъ, кои суть сходственныя.

(60) Или такъ: обратныя фигуры суть тѣ, кои имѣютъ стороны около своихъ угловъ обратно пропорціональныя.

(61) Или: высота треугольника есть прямая, отъ вершины перпендикулярно къ основанію проведенная.

(62) Сіе опредѣленіе изъясняютъ различнымъ образомъ. Здѣсь довольно замѣтить, что Эвклидъ и всѣ древніе Геометры употребляютъ оное въ такомъ смыслѣ какъ предложено выше*. *(45).

Къ Эвклидовымъ опредѣленіямъ можно еще присовокупить слѣдующія:

a. Прямыя линіи подобно разсѣченныя суть тѣ, коихъ отрѣзки суть пропорціональные.

b. Параллелограммъ по нѣкоей прямой линіи помѣщенный называется имѣющимъ недостатокъ, когда не занимаетъ цѣлой линіи, а имѣющимъ избытокъ, когда занимаетъ прямую большую той, по которой помѣщается: и естьли на цѣлой дополнить параллелограммъ, то въ первомъ случаѣ прибавится параллелограммъ, называемый избытокъ, а во второмъ отнимется, называемый недостатокъ.

(63) Слѣдствіе. Треугольники и параллелограммы равныхъ высотъ, суть взаимно какъ ихъ основанія.

(64) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, какъ данную прямую раздѣлять на сколько ниесть равныхъ частей.

(65) Слѣдствіе. Равныхъ параллелограммовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ. И которыхъ параллелограммовъ основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равные.

(66) Тоже сказать можно и о треугольникахъ.

(67) Что сказано о прямоугольникахъ, можно сказать и о параллелограммахъ, имѣющихъ вмѣсто угловъ прямыхъ равные.

(68) И здѣсь вмѣсто прямоугольныхъ параллелограммовъ могутъ быть всякіе равноугольные.

(69) Новые Геометры вмѣсто удвоеннаго отношенія двухъ сходственныхъ сторонъ, подобныхъ фигуръ, употребляютъ отношеніе квадратовъ изъ оныхъ линій: но сіе употребленіе, какъ замѣчаетъ Гурьевъ, произошло болѣе отъ приложе-

нія Числительной науки къ Геометріи, нежели отъ сущности предмѣта; ибо квадраты сами суть подобныя фигуры, и находятся какъ и прочія въ удвоенномъ отношеніи сторонъ своихъ; и потому принаравливать квадраты къ другимъ фигурамъ столь же прилично, какъ и сіи другія фигуры къ квадратамъ.

(70) Предложеніе сіе имѣетъ свою силу, когда будетъ вмѣсто четырехъ три прямыя.

(71) Слѣдствіе. 1. Треугольники, въ коихъ одинъ уголъ равенъ одному углу, суть взаимно въ сложенномъ отношеніи изъ отношеній сторонъ, кои около сихъ равныхъ угловъ.

Слѣдствіе 2. Треугольники и параллелограммы, имѣющіе по одному углу равному, суть взаимно какъ прямоугольники содержимые въ сторонахъ, кои около равныхъ угловъ.

Слѣдствіе 3. Треугольники и параллелограммы суть взаимно въ отношеніи сложенномъ, изъ отношенія основанія къ основанію и отношенія высоты къ высотѣ.

(72) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что параллелограммы, имѣющіе по одному углу равному и стороны около равныхъ угловъ пропорціональныя, суть подобны.

(73) Вмѣсто: *Но данная прямолинейная фигура, коей . . . недостатокъ*, можно сказать: но данная прямолинейная фигура не должна быть больше параллелограмма, поставленнаго по половинѣ той

прямой, и котораго недостатокъ подобенъ тому же данному параллелограмму.

(74) Оба предъидущія предложенія, то есть 29е и 30е употребляются весьма часто древними Геометрами.

(75) Слѣдствіе. Ежели къ прямой, которая разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, приложенъ будетъ впрямъ большій отрѣзокъ; то цѣлая прямая, въ точкѣ гдѣ приложенъ отрѣзокъ, будетъ опять разсѣчена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

Ибо пусть AB (ф. 26) будетъ разсѣчена въ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, такъ что AC будетъ большій отрѣзокъ; и пусть впрямъ съ AB приложена будетъ BD равная AC. И поелику какъ AB къ AC, такъ AC къ CB; то преложеніемъ, какъ AC къ AB, такъ CB къ AC; и совокупленіемъ, какъ AC съ AB къ AB такъ AC съ CB къ AC; но AC равна BD: посему какъ AB съ BD къ AB такъ AC съ CB къ BD; то есть, какъ AD къ AB, такъ AB къ BD.

(76) Часть сего предложенія, заключенная въ знакахъ « », помѣщена извѣстнымъ древнимъ издателемъ и толкователемъ Эвклида Ѳеономъ, коему Р. Симсонъ и другіе новые издатели обыкновенно приписываютъ погрѣшности (большею частію мнимыя), находимыя ими въ Началахъ.

Слѣдствіе. 1. Какъ уголъ при центрѣ круга есть къ четыремъ угламъ прямымъ, такъ дуга, на коей онъ стоитъ, къ окружности того круга.

Ибо, ежели провесть въ кругѣ два поперечника, одинъ къ другому подъ прямыми углами, то сіи углы будутъ стоять на равныхъ дугахъ, кои суть

четверти окружности; посему какъ уголъ при центрѣ къ четыремъ прямымъ, такъ дуга, на коей онъ стоитъ, къ четверти окружности. Но какъ прямой уголъ къ четыремъ прямымъ, такъ четверть къ цѣлой окружности: чего ради равномѣстно, какъ уголъ при центрѣ, и проч.

Точно также докажется, что какъ вырѣзокъ къ четверти круга, такъ основаніе вырѣзка къ четверти окружности.

Слѣдствіе 2. Подобныя дуги круговъ суть взаимно какъ окружности.

Ибо каждая изъ нихъ есть къ своей окружности, какъ углы при центрѣ на нихъ стоящіе, кои взаимно равны, къ четыремъ угламъ прямымъ. Итакъ, поелику послѣднія отношенія суть тѣже, то и отношенія подобныхъ дугъ къ своимъ окружностямъ суть тѣже. Слѣдственно подобныя дуги, и проч.

КЪ КНИГѢ ОДИННАДЦАТОЙ.

(77) Прямая же оная называется наклоняющеюся, или наклонною.

(78) Новые Геометры въ семъ опредѣленіи пропускаютъ слово: *острой*.

(79) Такъ же опредѣляются и подобныя наклоненія прямыхъ линій къ плоскостямъ.

Опредѣленіе. Прямая есть параллельная къ плоскости, когда, будучи неопредѣленно продолжена на обѣ стороны, нигдѣ съ плоскостію не встрѣчается.

(80) Сіе опредѣленіе объяснено въ слѣдующемъ примѣчаніи.

(81) Сіе опредѣленіе есть болѣе аксіома, или какъ многимъ толкователямъ кажется, есть ѳеорема, то есть предложеніе, которое должно быть доказано. Р. Симсонъ въ примѣчаніи своемъ на оное, говоритъ: « поелику смыслъ слова, *равно*, » извѣстенъ и установленъ прежде сего опредѣле- » нія; то предложеніе, которое въ немъ заклю- » чается, есть ѳеорема, коея справедливость или » несправедливость должна быть доказана, а не при- » нята; и потому Ѳеонъ или иной какой изда- » тель, обративъ ѳеорему, которая должна быть » доказана, въ сіе опредѣленіе, поступилъ невѣ- » жественно. Ибо, что фигуры подобны, доказа- » тельство сему должно быть выведено изъ опре- » дѣленія подобнымъ фигурамъ; а что онѣ равны, » то доказательство сему должно быть выведено » изъ аксіомы: *совмѣщающіяся взаимно, суть и* » *взаимно равны*; или изъ предложеній В или 1ого » или 14го пятой книги. »

Р. Симсонъ потомъ утверждаетъ, что сіе опредѣленіе даже не можетъ быть и ѳеоремою, ибо оно въ нѣкоторыхъ случаяхъ, говоритъ онъ, ложно; что и доказываетъ слѣдующимъ примѣромъ: Вообразимъ, что къ какому ниесть многограннику приставлена пирамида, имѣющая основаніемъ плоскость многогранника; вообразимъ еще, что, вмѣсто того, чтобы приложить пирамиду, оная будетъ отнята, сдѣлавъ въ многогранникѣ вогнутость пирамидѣ равную: то получимъ два тѣла, коихъ плоскости равны, каждая каждой; но совсѣмъ тѣмъ сіи два тѣла будутъ не равны. Основываясь на семъ Р. Симсонъ уничтожаетъ

вовсе опредѣленіе тѣламъ равнымъ, а опредѣленіе подобнымъ тѣламъ замѣняетъ другимъ.

Лежандръ, разбирая Эвклидовы 9е и 10е опредѣленія и замѣчанія Р. Симсона, говоритъ: « фигуры, « коихъ равенство или подобіе доказываетъ Эвклидъ, « основываясь на 9мъ и 10мъ опредѣленіяхъ, суть « таковы, что углы ихъ толстые содержимы не- « больше какъ тремя плоскостями: но естьли два « угла толстые составлены изъ трехъ плоскихъ, « кои равны каждый каждому; то довольно ясно « доказано во многихъ мѣстахъ Эвклида, что сіи « углы равны. Съ другой стороны, естьли два « многогранника имѣютъ плоскости равныя или « подобныя, каждую каждой; то сходственные углы « толстые будутъ составлены изъ равномногихъ « угловъ плоскихъ, кои равны каждый каждому. « Естьли же сходственныя плоскости равны и сход- « ственные толстые углы равны; то нѣтъ со- « мнѣнія, что тѣла равны, ибо оныя могутъ чрезъ « наложеніе совмѣститься, или по крайней мѣрѣ « будутъ взаимно симметрическія (*). Изъ сего « явствуетъ, что опредѣленія 9е и 10е справедливы « и могутъ быть допущены, покрайней мѣрѣ, когда « углы толстые будутъ трегранные, который « случай одинъ токмо и встрѣчается у Эвклида. « Слѣдственно упрекъ въ неосновательности,

(*) О симметріи и неудобствахъ оной смот. въ Опытѣ о усов. Елем. Геом. Гурьева, стр. 82. Здѣсь нельзя не замѣтить, что симметрія предполагаетъ опредѣленіе 10е: слѣдственно Лежандръ, доказывая чрезъ симметрію предложенія изъ сего опредѣленія непосредственно слѣдующія, доказываетъ idem per idem.

« дѣлаемый Эвклиду или его толкователямъ, пере-
« стаетъ быть важнымъ, и относится токмо къ
« нѣкоторымъ ограниченіямъ или объясненіямъ, имъ
« пропущеннымъ ». Послѣ сего Лежандръ, при изслѣдованіи случая, когда въ тѣлахъ толстые углы суть многогранные, приведя вышепомѣщенное нами возраженіе или примѣръ Р. Симсона о тѣлахъ съ приложенною и отнятою пирамидами, говоритъ, что « одно изъ сихъ тѣлъ имѣетъ входящій уголъ;
« а болѣе нежели вѣроятно, что Эвклидъ дѣлаетъ
« изключеніе тѣламъ неправильнымъ имѣющимъ
« вогнутости или углы входящіе, и что онъ ограни-
« чилъ себя многогранниками выпуклыми. По при-
« нятіи же сего изключенія, безъ котораго впро-
« чемъ другія предложенія были бы несправедливы,
« приводимый Р. Симсономъ примѣръ противъ того
« опредѣленія или ѳеоремы Эвклидовой ничего не
« доказываетъ; напротивъ того послѣ многократ-
« ныхъ о семъ размышленій я думаю, что сія
« ѳеорема совершенно справедлива, но повидимому
« не легко оную доказать ».

И дѣйствительно равенство таковыхъ тѣлъ зависитъ наипаче отъ того, что сопровождающія ихъ одинакія обстоятельства (равенство и подобіе плоскостей) дѣлаютъ каждую съ своей стороны фигуру непремѣнною; и что нѣтъ никакой причины, чтобы одна фигура была неравна другой. Словомъ, опредѣленіе относительно равенства тѣлъ есть такое предложеніе, котораго справедливость почти очевидна, и которое, по сей можетъ быть самой причинѣ, легче понимать, нежели доказать. Въ заключеніе скажемъ съ Лежандромъ: comme ce

théorême est intéressant par lui-même, il serait à désirer qu'on en trouvât une démonstration générale.

Что касается до подобія многоугольниковъ значущагося въ опредѣленіи 9мъ и частію 10мъ, то Р Симсонъ замѣняетъ оныя слѣдующимъ: «Подобныя «прямолинейныя тѣла суть тѣ, кои содержимы «равномногими подобными плоскостями и имѣютъ всѣ «толстые углы равные каждый каждому.» Но Лежандръ справедливо замѣчаетъ, что сіе опредѣленіе не можетъ быть принято, ибо заключаетъ въ себѣ лишнія условія: отбросивъ же условіе, заключающее равенство толстыхъ угловъ, сіе опредѣленіе превратится въ Эвклидово, которое находитъ онъ недостаточнымъ, потому что предполагается въ немъ равенство тѣлъ. На семъ основываясь Лежандръ отвергаетъ опредѣленіе Симсоново и замѣняетъ оное слѣдующими двумя: «1. Двѣ трехсто» ронныя пирамиды суть подобныя, когда имѣютъ » двѣ стороны подобныя, подобнорасположенныя » и равно между собою наклоненныя. 2. Два много» гранника суть подобные, когда имѣютъ основа» нія подобныя, и сходственныхъ угловъ вершины, » которыя суть внѣ сихъ основаній, опредѣлены » вершинами подобныхъ трехсторонныхъ пирамидъ.» Но сіе опредѣленіе, какъ замѣчаетъ Гурьевъ, сверхъ неудобства, что раздѣлено на двѣ части, имѣетъ еще то, что весьма принужденно; и что вторая часть его сомнительна; при чемъ въ самомъ употребленіи требуетъ многихъ ѳеоремъ, какъ то видѣть можно изъ предложенныхъ на сей конецъ Лежандромъ. Впрочемъ, поелику подобіе многогранниковъ есть токмо простое наименованіе свойствъ

подъ симъ именемъ означенныхъ; то и нѣтъ никакой причины отвергать Эвклидова опредѣленія, тѣмъ болѣе, что подобіе тѣлъ съ подобіемъ плоскихъ фигуръ имѣетъ весьма близкое сходство. И дѣйствительно, естьли дана плоская прямолинейная фигура, и еще прямая линія; то изъ сей прямой извѣстнымъ строеніемъ опредѣлятся всѣ стороны и всѣ углы многоугольника, то есть всѣ величины предполагаемыя въ опредѣленіи подобныхъ плоскихъ фигуръ. Равнымъ образомъ, естьли данъ многогранникъ, и еще прямая сходственная съ его стороною; то опредѣлятся всѣ плоскости подобныя плоскостямъ даннаго многогранника, то есть всѣ величины предполагаемыя въ опредѣленіи подобныхъ многогранниковъ.

(82) Опредѣленіе. Подобныя прямолинейныя тѣла называются подобно положенными, или подобно написанными изъ тѣхъ ихъ сторонъ, кои суть сходственныя стороны подобныхъ ихъ плоскостей.

(83) Слѣдствіе. Изъ сего явствуетъ, что прямыя, исходящія отъ центра шара до поверхности онаго, суть взаимно равныя; и также всѣ поперечники шара равны взаимно.

(84) Опредѣленіе. Высота тѣла, находящагося между плоскостію и прямою къ ней параллельною, или между двумя плоскостями параллельными, есть прямая, перпендикулярно къ основанію проведенная, отъ какой ниесть точки взятой на прямой или на плоскости противулежащей основанію. Высота же пирамиды и конуса есть прямая, отъ вершины перпендикулярно къ основанію проведенная.

(85) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что прямая линія пересѣкаетъ плоскость въ одной токмо точкѣ.

(86) По мнѣнію нѣкоторыхъ толкователей сіе предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ опр. 35 и 7 кн. 1.

(87) И отъ тойже точки внѣ плоскости не могутъ быть проведены двѣ прямыя перпендикулярныя къ оной. Ибо, естьли возможно, пусть проведены будутъ; то онѣ будутъ параллельны*, что *6.
нелѣпо.

(88) Въ семъ предложеніи должно, или по крайней мѣрѣ можно, пропустить слѣдующее: потому же BC есть и къ плоскости . . . прямыхъ AB, BC.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ А.

(89) Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой.

Пусть будутъ параллельныя плоскости AB, CD (ф. 27); и пусть прямая EF будетъ перпендикулярна къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, AB. Говорю, что EF перпендикулярна и къ плоскости CD.

Пусть чрезъ EF проведены будутъ двѣ плоскости; и одна изъ нихъ пусть пересѣкаетъ параллельныя плоскости въ прямыхъ EA, FC, а другая въ прямыхъ EB, FD.

Итакъ EA параллельна къ FC, а EB къ FD*. *16.
И поелику EF перпендикулярна къ плоскости AB; то EF со всѣми прямыми линіями, съ нею

встрѣчающимися и лежащими на сей плоскости;
опр.3. дѣлаетъ углы прямые. Встрѣчается же съ EF каждая изъ прямыхъ EA, EB, лежащихъ на той плоскости: посему каждый изъ угловъ FEA, FEB есть прямой. И поелику FC параллельна къ AE, и на нихъ падаетъ EF: то два угла FEA, EFC равны
29,I. двумъ прямымъ; но уголъ FEA прямой, посему и уголъ EFC прямой. Потому же и уголъ EFD прямой. Чего ради EF къ каждой изъ прямыхъ FC, FD есть подъ прямыми углами. Но ежели прямая, къ двумъ прямымъ встрѣчающимся взаимно, будетъ поставлена подъ прямыми углами, при взаимномъ оныхъ сѣченіи; то сія прямая будетъ подъ прямыми
4. углами и къ плоскости тѣхъ прямыхъ: посему EF подъ прямыми углами къ плоскости прямыхъ FC, FD. Но сія плоскость есть плоскость CD: посему EF перпендикулярна къ плоскости CD.

Итакъ прямая перпендикулярная, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ В.

(90) Плоскость, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой.

Пусть будутъ параллельныя плоскости AB, CD (ф. 28); и пусть плоскость EF будетъ перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, AB. Говорю, что EF перпендикулярна и къ плоскости CD.

Пусть взаимныя сѣченія плоскостей AB, CD съ плоскостію EF будутъ прямыя GF, FH; возьми на GF какую ниесть точку G; и отъ точки G

проведи на плоскости EF, подъ прямыми углами къ GF, прямую GE*. *11,I.

Поелику плоскость EF перпендикулярна къ плоскости AB, и прямая GE проведена на плоскости EF, подъ прямыми углами къ GF взаимному сѣченію сихъ плоскостей; то прямая GE перпендикулярна къ плоскости AB*. Но плоскость AB *опр.4.
параллельна къ плоскости CD; а прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и къ другой*: посему GE *A.
перпендикулярна и къ плоскости CD. Но ежели прямая будетъ подъ прямыми углами къ какой ниесть плоскости; то всякія плоскости, проходящія чрезъ сію прямую, будутъ къ тойже плоскости подъ прямыми углами*: слѣдственно и плоскость EF пер- *18.
пендикулярна къ плоскости CD.

Итакъ плоскость, и проч. ч. и д. н.

ПРЕДЛОЖЕНІЕ C.

(91) Параллелепипеды, содержимые равноугольными плоскостями, суть взаимно въ отношеніи сложенномъ изъ отношеній сторонъ, кои около ихъ толстыхъ угловъ.

Пусть будутъ параллелепипеды AB, CD (ф. 29), содержимые равноугольными плоскостями; а именно: пусть будетъ равноугольна плоскость AG плоскости CN, плоскость AH плоскости CR, и плоскость HG плоскости RN: посему и прочія три плоскости параллелепипеда AB равноугольны прочимъ тремъ параллелепипеда CD. Говорю, что AB къ CD имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ CF, и EG къ FN, и EH къ FR.

Продолжи AE, GE, HE впрямъ; и положи EK равную CF, и EL равную F[illegible], и еще EM равную FR; и дополни параллелограммъ LK, который будетъ, какъ уже доказано было*, равенъ параллелограмму CN. Изъ основанія LK дополни параллелепипеды LQ и KP; и возьми какую ниесть прямую S; и сдѣлай какъ AE къ EK, такъ S къ T*, и какъ GE къ EL, такъ T къ V, и какъ HE къ EM, такъ V къ X.

*въ33.

*акс.а,V.

Поелику параллелепипеды AB, LQ имѣютъ туже высоту; то какъ AB къ LQ, такъ основаніе AG къ основанію KL*. Но AG къ KL имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK, и GE къ EL*, которое есть отношеніе прямыя S къ V*: посему какъ S къ V, такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду LQ. И поелику параллелепипедъ QP пересѣченъ плоскостію LK, параллельною къ противулежащимъ плоскостямъ: то какъ основаніе HK къ основанію KM, такъ параллелепипедъ QL къ параллелепипеду KP*. Но какъ основаніе HK къ основанію KM, такъ HE къ EM*, и такъ V къ X, по строенію: посему какъ V къ X, такъ QL къ KP*. Итакъ, поелику доказано, что какъ S къ V, такъ параллелепипедъ AB къ LQ; и какъ V къ X, такъ параллелепипедъ QL къ KP: то равномѣстно, какъ S къ X, такъ параллелепипедъ AB къ параллелепипеду KP*. Но KP равенъ CD: посему какъ S къ X, такъ AB къ CD*. И поелику есть одинъ рядъ величинъ S, T, V, X имѣющихъ взаимное отношеніе; а другой рядъ отношеній: AE къ EK; GE къ EL; HE къ EM, которыя суть тѣже съ отношеніями величинъ

*32.

*23,VI.

*(45).

*25.

*1 I.

*11,V.

*22,V.

*7 и 11,V.

перваго ряда; то S къ X имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK, и GE къ EL, и HE къ EM*: посему параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ EK, и GE къ EL, и HE къ EM. Но отношеніе сложенное изъ сихъ есть тоже съ отношеніемъ сложеннымъ изъ отношеній AE къ CF, и GE къ NF, и EH къ FR*; ибо EK равна CF, а EL равна FN, и EM равна FR: чего ради параллелепипедъ AB къ параллелепипеду CD имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній AE къ CF, и GE къ NF, и EH къ FR*.

*(45). *7 и E, V. *11, V.

Итакъ параллелепипеды, и проч. ч. и д. н.

КЪ КНИГѢ ДВѢНАДЦАТОЙ.

(92) Слѣдствіе. Очертанія подобныхъ многоугольниковъ въ кругахъ, суть взаимно какъ поперечники круговъ.

Ибо премѣненіемъ, какъ AB къ FG, такъ BC къ GH, и такъ CD къ HK, и такъ DE къ KL, и еще такъ EA къ LF. Но какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*: посему какъ AB къ FG, такъ AB, BC, CD, DE, EA къ FG, GH, HK, KL, LF; то есть, такъ очертаніе многоугольника ABCDE къ очертанію многоугольника FGHKL. Доказано же, что какъ AB къ FG, такъ поперечникъ BM къ поперечнику GN: слѣдственно какъ очертаніе многоугольника ABCDE къ очертанію многоугольника FGHKL, такъ поперечникъ BM къ поперечнику GN*.

*12, V. *11, V.

(93) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что подобные многоугольники въ кругахъ, суть взаимно какъ круги. Ибо и многоугольники и круги суть взаимно въ удвоенномъ отношеніи поперечниковъ.

(94) Предложенную нами фигуру можно замѣнить фигурою 30.

(95) Сіе слѣдствіе можно еще доказать такъ:

Пусть будутъ подобныя пирамиды, коихъ основанія многоугольники ABCDE, FGHKL, а вершины точки M, N; сходственныя же стороны пусть будутъ AB, FG; и пусть основанія ABCDE, FGHKL раздѣлены будутъ на подобные треугольники ABC,
20,VI. ACD, ADE, FGH, FHK, FKL.

Поелику треугольникъ ABM подобенъ треугольнику FGN, и треугольникъ ABC треугольнику FGH: то какъ AM къ AB, такъ FN къ FG; и какъ AB къ AC, такъ FG къ FH: посему, равномѣстно,
22,V. какъ AM къ AC, такъ FN къ FH. Потому же и какъ AC къ CM, такъ FH къ HN. Чего ради еще равномѣстно, какъ AM къ MC, такъ FN къ NH. Итакъ стороны треугольниковъ ACM, FHN суть пропорціональныя: и потому треугольникъ ACM есть
5,VI. равноугольный треугольнику FHN; слѣдственно и подобенъ ему. Чего ради пирамида ABCM подобна пира-
on 9,IX. мидѣ FGHN, ибо онѣ содержатся равномногими подобными плоскостями. Потому же и пирамида ACDM подобна пирамидѣ FHKN, а пирамида ADEM пирамидѣ FKLN. И поелику подобныя пирамиды, имѣющія треугольныя основанія, суть взаимно въ утроен-
8. номъ отношеніи сходственныхъ сторонъ: то пирамида ABCM къ пирамидѣ FGHN имѣетъ утроенное

отношеніе прямыя AC къ FH. Потому же и пирамида ACDM къ пирамидѣ FHKN имѣетъ утроенное отношеніе AC къ FH. Чего ради какъ пирамида ABCM къ пирамидѣ FGHN, такъ пирамида ACDM къ пирамидѣ FHKN*. Подобно же докажемъ, что какъ пирамида ACDM къ пирамидѣ FHKN, такъ пирамида ADEM къ пирамидѣ FKLN. И поелику какъ одна предъидущая къ одной послѣдующей, такъ всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ*; посему какъ пирамида ABCM къ пирамидѣ FGHN, такъ цѣлая пирамида, ABCDEM къ цѣлой FGHKLN. Но пирамида ABCM къ пирамидѣ FGHN имѣетъ утроенное отношеніе прямыя AB къ FG: посему и пирамида ABCDEM къ пирамидѣ FGHKLN имѣетъ утроенное отношеніе прямыя AB къ FG.

*сл:E,V.

*12,V.

Слѣдствіе. Всякія подобныя прямолинейныя тѣла суть взаимно въ утроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ. Ибо отъ нѣкихъ точекъ внутри ихъ или отъ вершинъ толстыхъ ихъ угловъ, можно раздѣлить сіи тѣла на пирамиды, коихъ вершины будутъ при тѣхъ точкахъ, а основанія плоскости, коими ограничиваются тѣла. Сіи пирамиды будутъ взаимно подобны и пропорціональны цѣлымъ тѣламъ, что докажется какъ и предъидущее слѣдствіе. Но поелику сіи пирамиды суть взаимно въ утроенномъ отношеніи сходственныхъ сторонъ; то и оныя цѣлыя тѣла будутъ взаимно въ утроенномъ отношеніи тѣхъ же сходственныхъ сторонъ.

(96) Слѣдствіе. 1. Подобно докажемъ, что равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями параллелограммы,

основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И которыхъ пирамидъ, имѣющихъ основаніями параллелограммы, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равныя.

Слѣдствіе 2. Равныхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія многоугольныя, основанія суть обратно пропорціональны высотамъ: И которыхъ пирамидъ, имѣющихъ основанія многоугольныя, основанія обратно пропорціональны высотамъ, тѣ суть равныя. Ибо, естьли составлены будутъ параллелограммы равные основаніямъ пирамидъ; и на сихъ параллелограммахъ возставлены будутъ пирамиды равновысотныя первымъ пирамидамъ: то пирамиды на параллелограммахъ будутъ равны пирамидамъ на многоугольникахъ. И потому предлагаемое справедливо.

(97) Ибо, протянувъ AS, AP (ф. 31), поелику AK равна AB, и KS равна BP; то двѣ прямыя AK, KS равны двумъ прямымъ AB, BP, каждая каждой; и основаніе AS равно основанію AP: посему уголъ AKS
8,1. равенъ углу ABP. А и прямой уголъ SXK равенъ прямому углу BVP: итакъ два треугольника KSX, BPV имѣютъ два угла равные двумъ угламъ, они же имѣютъ и одну сторону равную одной сторонѣ, кои противулежатъ равнымъ угламъ, то есть SK равную PB: посему и прочія стороны
26,1. будутъ имѣть равныя прочимъ сторонамъ; а посему SX равна PV, и KX равна BV.

(98) Ибо вообрази, что отъ точекъ Q, T (ф. 31) проведены перпендикулярныя прямыя къ плоскости круга BCDE, то и онѣ упадутъ на BD, KN; и чрезъ точки, въ коихъ встрѣтятъ сіи прямыя, протяни

прямую; и еще протяни BQ, KT: то подобно докажется, что KB параллельна къ TQ. Доказано же, что KB параллельна и къ SP: посему SP параллельна къ TQ*: слѣдственно четыреугольникъ *9,XI.
SPQT есть на одной плоскости. Потому же и четыреугольникъ TQRU есть на одной плоскости.

(99) И дѣйствительно, поелику KB, BP, KS (ф. 31) равны, а PS меньше; то и углы KYB, BYP, KYS взаимно равны, а уголъ PYS меньше. Но четыре угла KYB, BYP, PYS, SYK равны четыремъ прямымъ; посему уголъ KYB тупой, и треугольникъ KBY есть тупоугольный. Въ тупоугольныхъ же треугольникахъ квадратъ изъ стороны, противулежащей тупому углу, больше квадратовъ изъ сторонъ, содержащихъ тупой уголъ: посему квадратъ изъ BK больше квадратовъ изъ KY, BY Но квадратъ изъ KY равенъ квадрату изъ BY, ибо KY равна BY: посему квадратъ изъ BK больше нежели двукратный квадратъ изъ BY.

Далѣе потомъ, вмѣсто «Отъ точки K проведи перпендикулярную къ BD прямую KZ» лучше сказать: «Протяни KV: то подобно какъ и прежде докажемъ, что уголъ KBV равенъ углу PBV. И поелику KB равна BP, а BV общая; то двѣ прямыя KB, BV равны двумъ прямымъ PB, BV; и содержатъ углы равные: посему и уголъ KVB равенъ углу BVP. Но уголъ BVP прямой; посему и уголъ BVK прямой; слѣдственно KV перпендикулярна къ AB».

Итакъ явно, что линію KZ должно считать за одну и туже съ KV.

(100) Какъ доказано въ началѣ (99).

(101) Говорю же, что и прочія плоскости вписаннаго многогранника, кои между дугами BO, KO (ф. 31), не прикасаются къ меньшему шару.

Отъ A проведи, перпендикулярную къ плоскости четыреугольника SPQT, прямую Ay; и протяни Py, yS: то подобно тому какъ доказано о четыреугольникѣ KBPS и точкѣ Y, докажемъ, что точка y есть центръ, а Py прямая отъ центра круга описаннаго около SPQT; и что SP больше TQ. И поелику четыреугольники KBPS, SPQT суть вписываемые въ кругахъ, и двѣ противулежащія стороны SK, PB четыреугольника KBPS равны двумъ противулежащимъ сторонамъ TS, QP четыреугольника SPQT, каждая каждой; а прочія двѣ стороны KB, SP больше двухъ прочихъ сторонъ SP, TQ, каждая каждыя: посему и прямая
лемма. KY больше прямой Sy. Поелику же AK равна AS; то и квадратъ изъ AK равенъ квадрату изъ AS. Квадрату же изъ AK равны квадраты изъ KY, YA; а квадрату изъ AS равны квадраты изъ Sy, yA: посему квадраты изъ KY, YA равны квадратамъ изъ Sy, yA. Но въ нихъ квадратъ изъ KY больше квадрата изъ Sy, ибо KY больше Sy: посему остальной квадратъ изъ AY меньше остальнаго изъ yA; а посему Ay больше AY. Но AY больше AG или Ag; итакъ тѣмъ паче Ay больше Ag. Сіе же подобно докажется и о четыреугольникѣ TQRU и о треугольникѣ URO. Такъ же докажемъ и о всѣхъ прочихъ плоскостяхъ помянутаго многогранника, что оныя не прикасаются къ меньшему шару.

Лемма. Ежели будутъ два четыреугольника ABCD, EFGH (ф. 32) вписанные въ кругахъ, коихъ центры

внутри сихъ четыреугольниковъ; и естьли двѣ противулежащія стороны DA, CB одного будутъ равны двумъ противулежащимъ сторонамъ HE, GF другаго, каждая каждой, а прочія двѣ стороны AB, CD будутъ больше прочихъ двухъ EF, GH, каждая каждыя: то и прямая отъ центра круга ABCD будетъ больше прямой отъ центра круга EFGH, то есть AK больше LE.

Ибо, буде не такъ; то AK или равна LE, или меньше ея. Пусть, вопервыхъ, будетъ равна. Протяни KB, KC, KD, LF, LG, LH. И поелику двѣ прямыя AK, KD равны двумъ прямымъ EL, LH, и основаніе AD равно основанію HE; посему и уголъ DKA равенъ углу HLE. Потому же и уголъ BKC, равенъ углу GLF. Еще же, поелику двѣ прямыя AK, KB равны двумъ прямымъ EL, LF; но основаніе AB больше основанія EF: посему и уголъ AKB больше угла ELF. Потому же и уголъ DKC больше угла HLG. Чего ради четыре угла около точки K суть больше четырехъ угловъ около точки L. Но четыре угла около K равны четыремъ прямымъ: посему четыре угла около L меньше четырехъ прямыхъ: что невозможно: слѣдственно AK не равна EL.

Говорю еще, что и не меньше. Ибо, буде возможно, пусть будетъ меньше. Возьми каждую изъ прямыхъ LM, LN равную AK; и протяни MN. Итакъ двѣ прямыя AK, KD равны двумъ прямымъ ML, LN, и содержатъ углы равные: посему основаніе AD равно основанію MN. И поелику EH параллельна къ MN: то треугольникъ EHL есть равноугольный треугольнику NLM, слѣдственно и

подобенъ ему. Посему какъ LE къ LM, такъ EH къ MN: но LE больше LM; посему EH больше MN. По положенію же EH равна AD, посему и AD больше MN; но и равна ей, по доказанному; что невозможно: чего ради AK не меньше EL. Доказано же, что и ни равна; слѣдственно AK больше LE. ч. и д. н.

Естьли будетъ остроугольный треугольникъ OPQ, коего двѣ стороны OP, OQ равны двумъ противулежащимъ четыреугольника ABCD сторонамъ DA, CB, каждая каждой; а основаніе его PQ будетъ меньше которыя ниесть изъ остальныхъ сторонъ AB, CD: то подобно докажемъ, что AK будетъ больше прямыя отъ центра круга описаннаго около треугольника OPQ.

(102) Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что подобныя прямолинейныя тѣла, вписанныя въ шарахъ, суть взаимно какъ сіи шары.

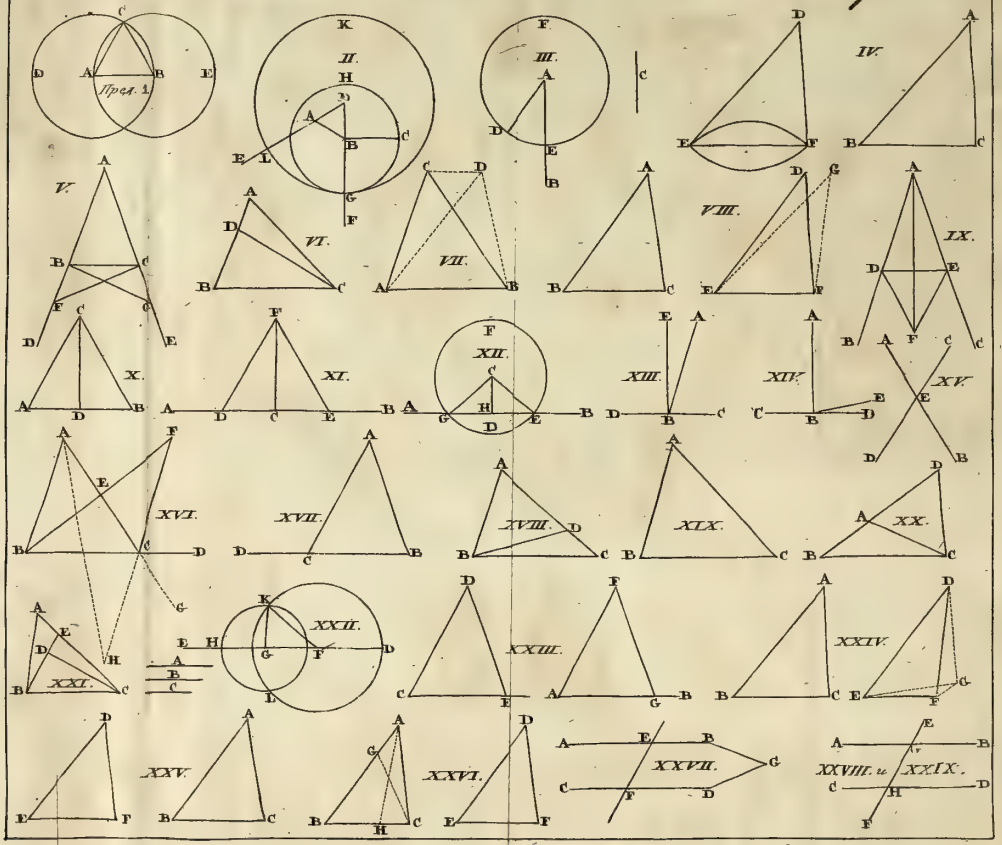
КОНЕЦЪ

ПОГРѢШНОСТИ.

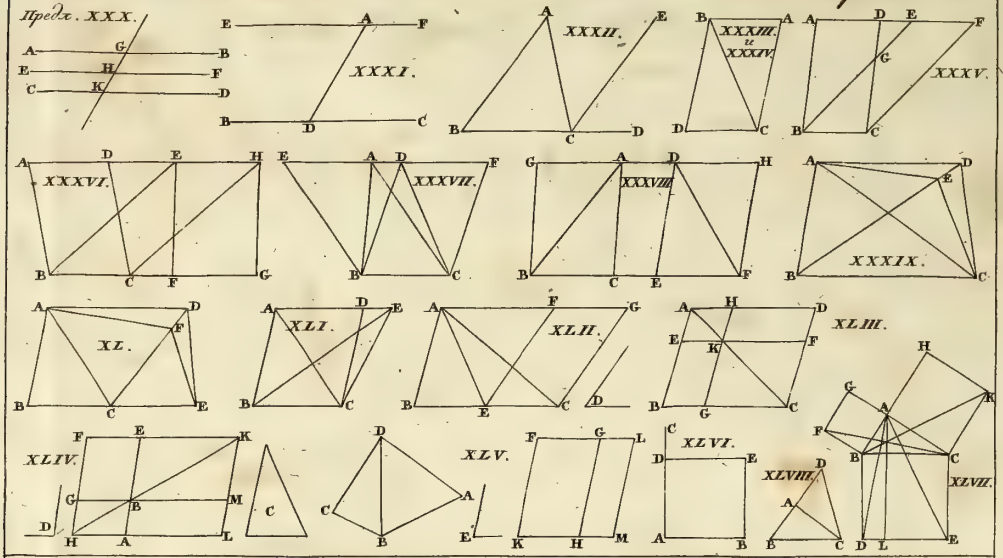
Стран.	Строк.	Напеч.	Читай.
6	26	*опр. 18.	*опр. 15.
14	13	*акс. 3.	*акс. 1 и 9.
24	3	ч. и д. н.	ч. и д. н. (13)
—	20	ч и д. н.	ч. и д. н. (14)
44	12	имъ есть	есть
47	10	AB	AD
52	6	и около	и пусть будутъ около
53	2	На	По
—	6	C a	a C
68	2	чрезъ G	чрезъ H
99	13	HK	KG
106	3	Итакъ	И какъ
107	20	*11, I.	*12, I.
123	3	CB	CD
136	6	ABC*; центръ F	ABC центръ F*;
139	26	GAC	HAC
140	2	GAC	HAC
146	3	равноугольный	прямоугольный
155	14	LD	LK
189	13	HQ	HP
251	5	*20.	*лем: 22,
281	16	*38, I.	*33, I.
286	26	CD	CB
290	14	BA	BD
325	2	CE	CF
350	23	EK, KF,	KF,
361	19	ABCH	ABCG
368	19	*оп. 13, XI.	*оп. 9, XI.

Стран.	Строк.	Напеч.	Читай.
396	3	*оп. 14, X.	*оп. 14, XI.
398	23	*8, XI.	*7, XI.
412	6	центра C	центра D
413	20	фиг. 3.	фиг. 4.
422	1	AD	AC
428	26	къ нему.	къ кругу.
430	22	равносторонный. А доказано, что и равноуголный. *Читай:* равноугольный. А доказано, что и равносторонный.	
434	13	B, C	B, D
439	11	и D къ E	и D къ F
441	25	C, D	B, D
456	24	отношеніе,	отношеніе, нежели
460	4	29е и 30е	28е и 29е

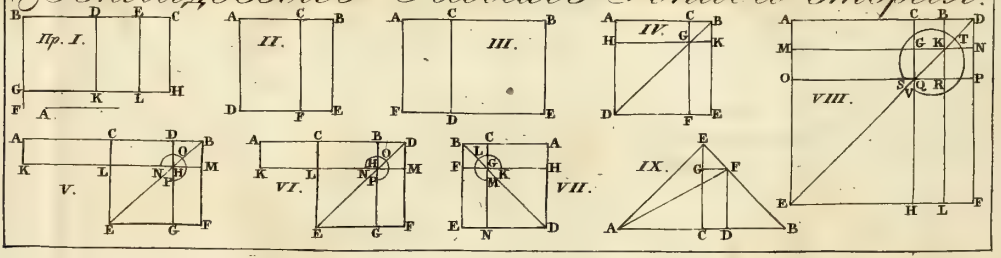
Эвклидовыхъ Началъ Книга первая.



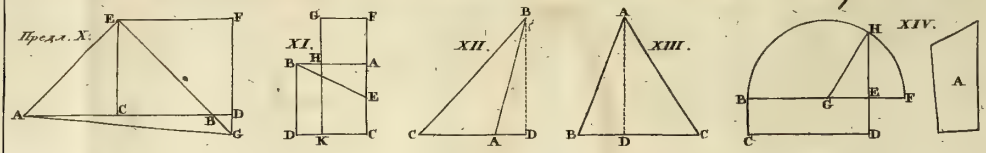
Эвклидовыхъ Началъ Книга первая.



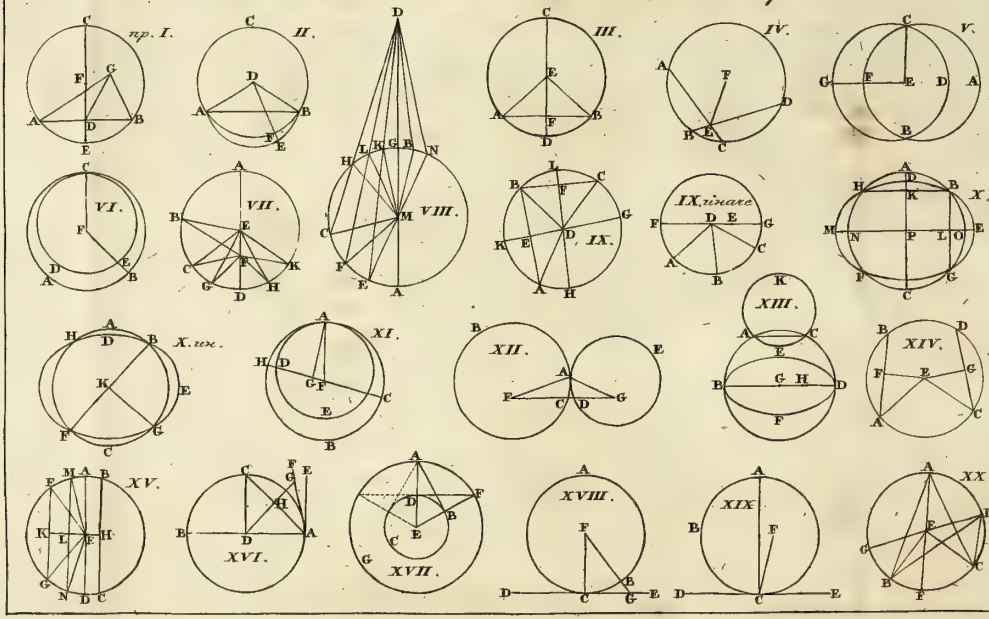
Эвклидовыхъ Началъ Книга вторая.



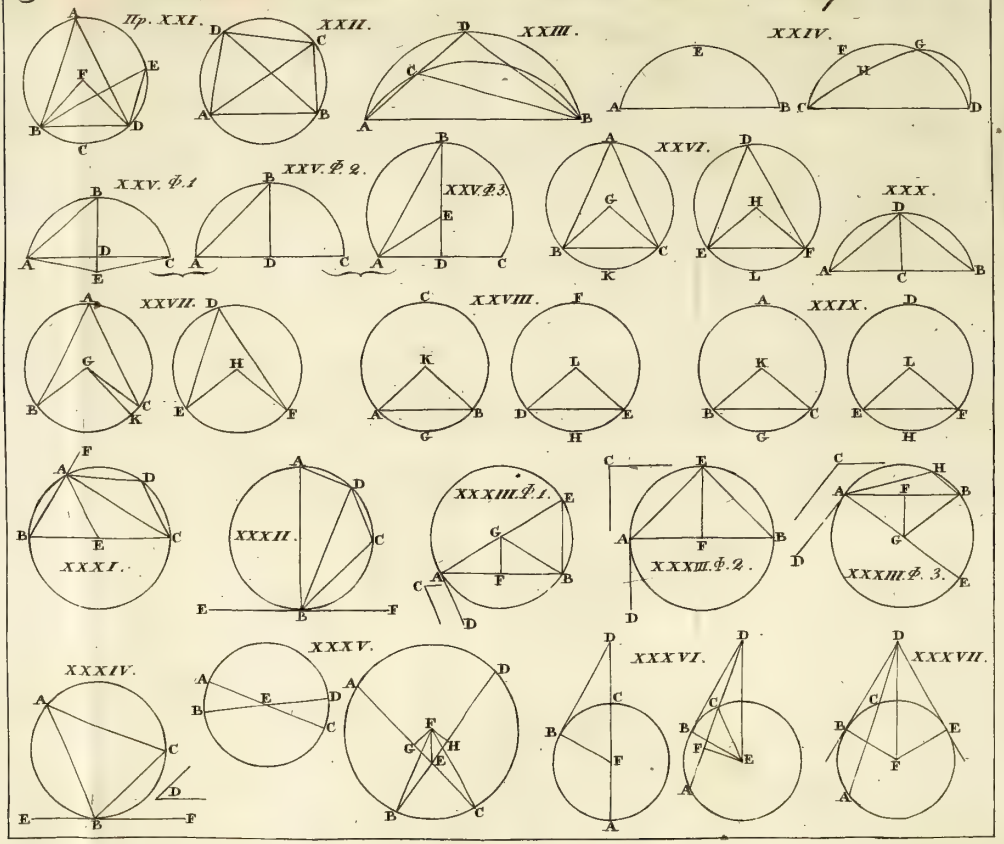
Эвклидовыхъ Началъ Книга вторая.



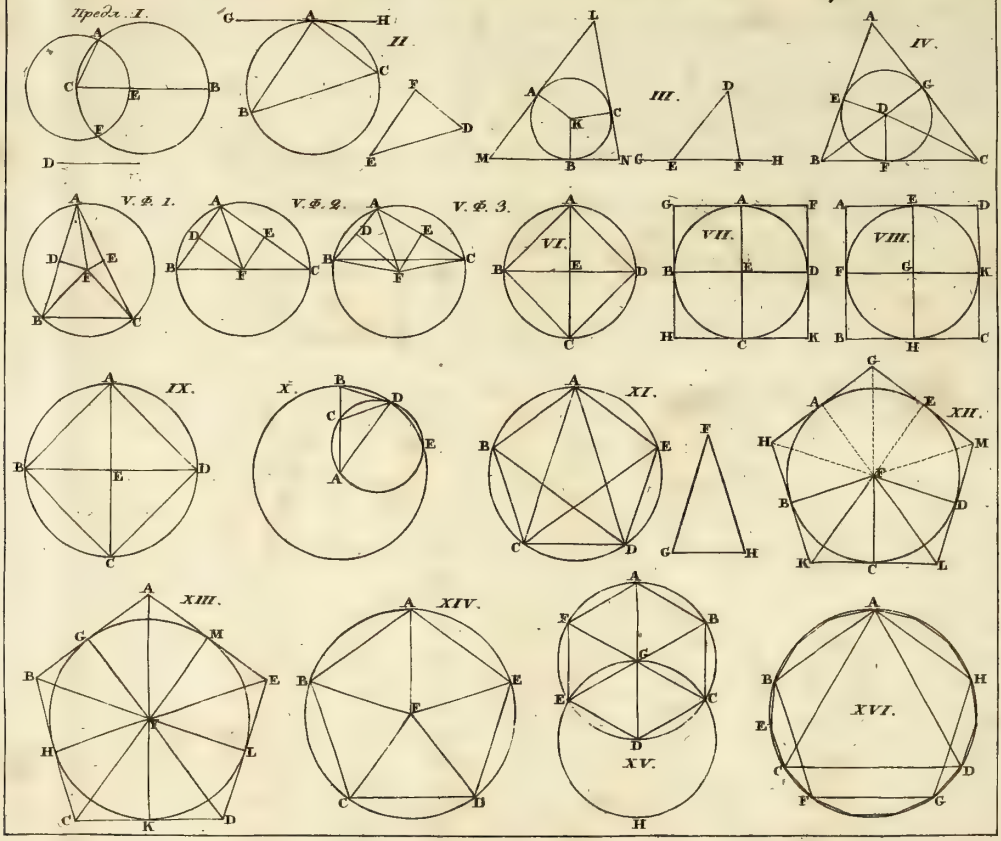
Эвклидовыхъ Началъ Книга третья.



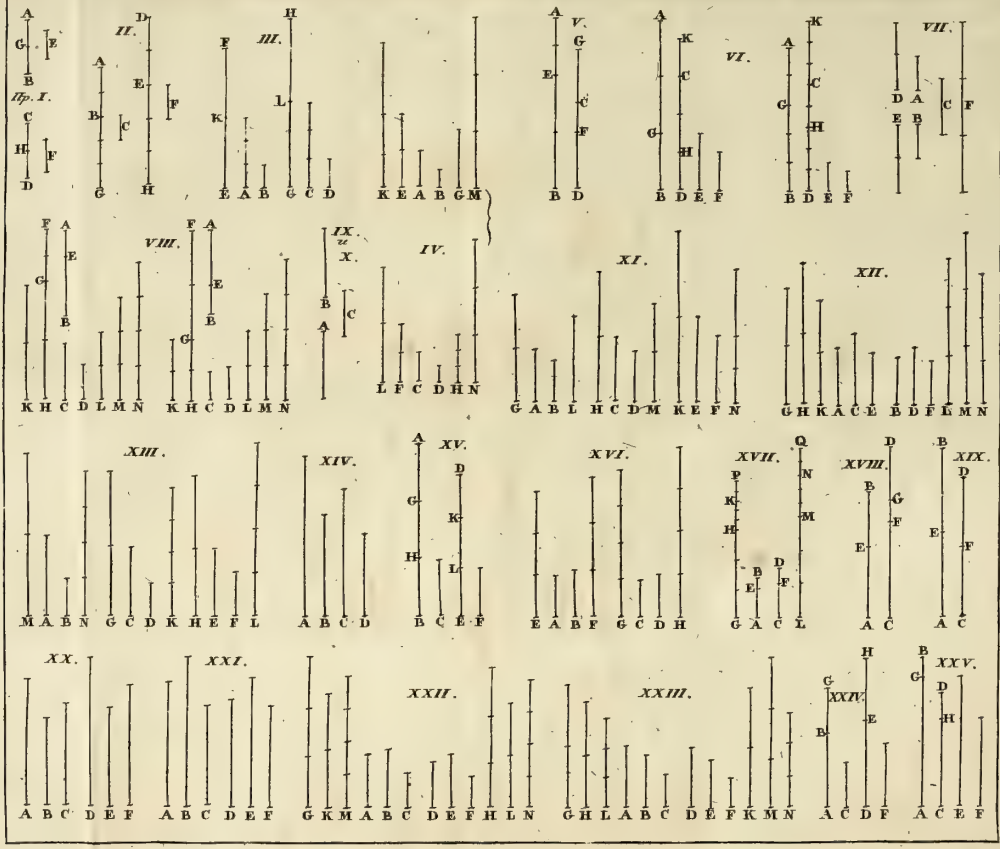
Эвклидовыхъ Началъ Книга третья.



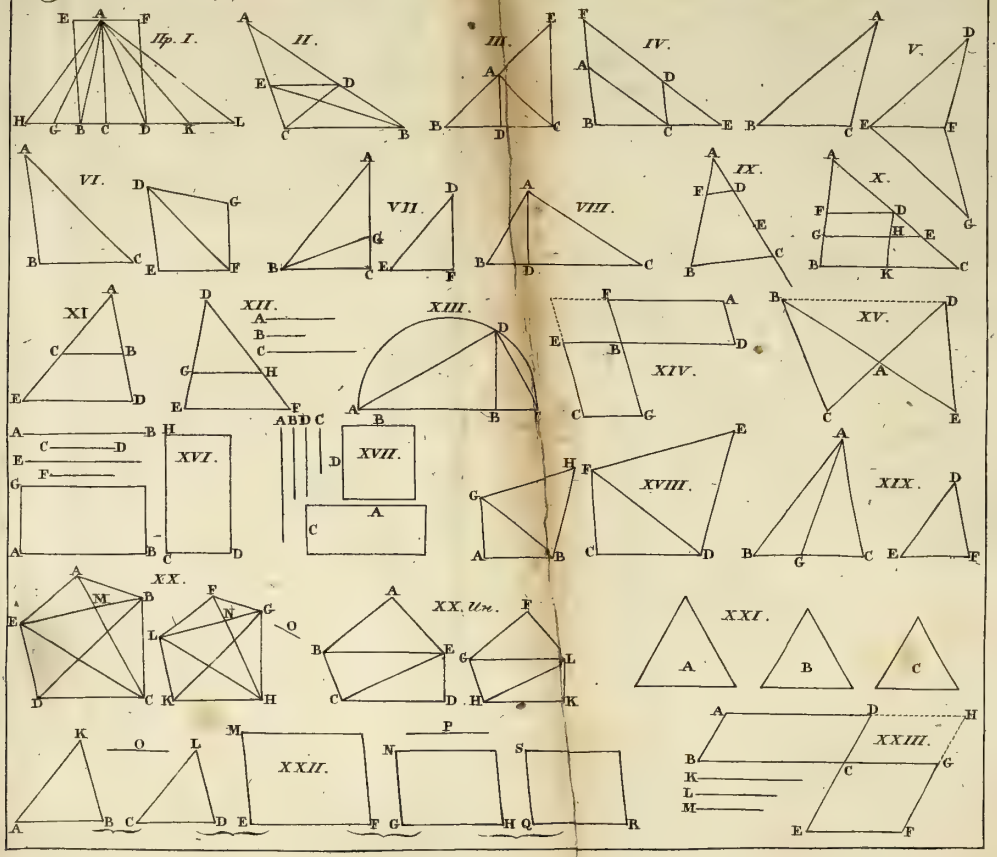
Эвклидовыхъ Началъ Книга четвертая.



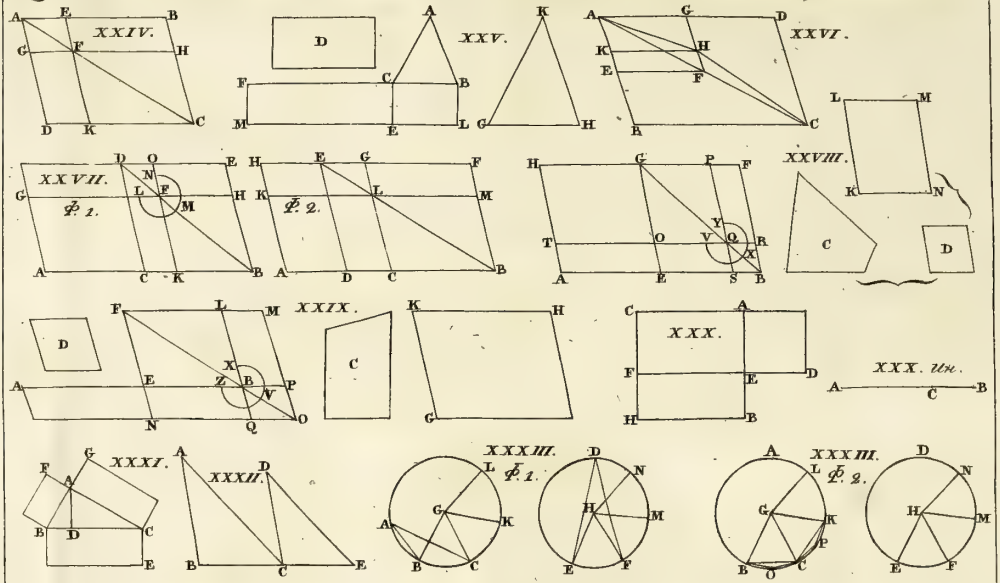
Эвклидовыхъ Началъ Книга пятая.



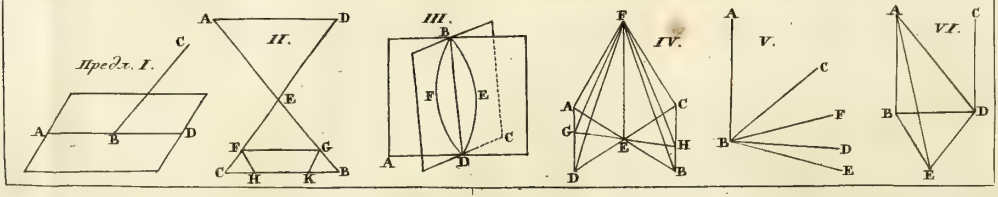
Эвклидовыхъ Началъ Книга шестая.



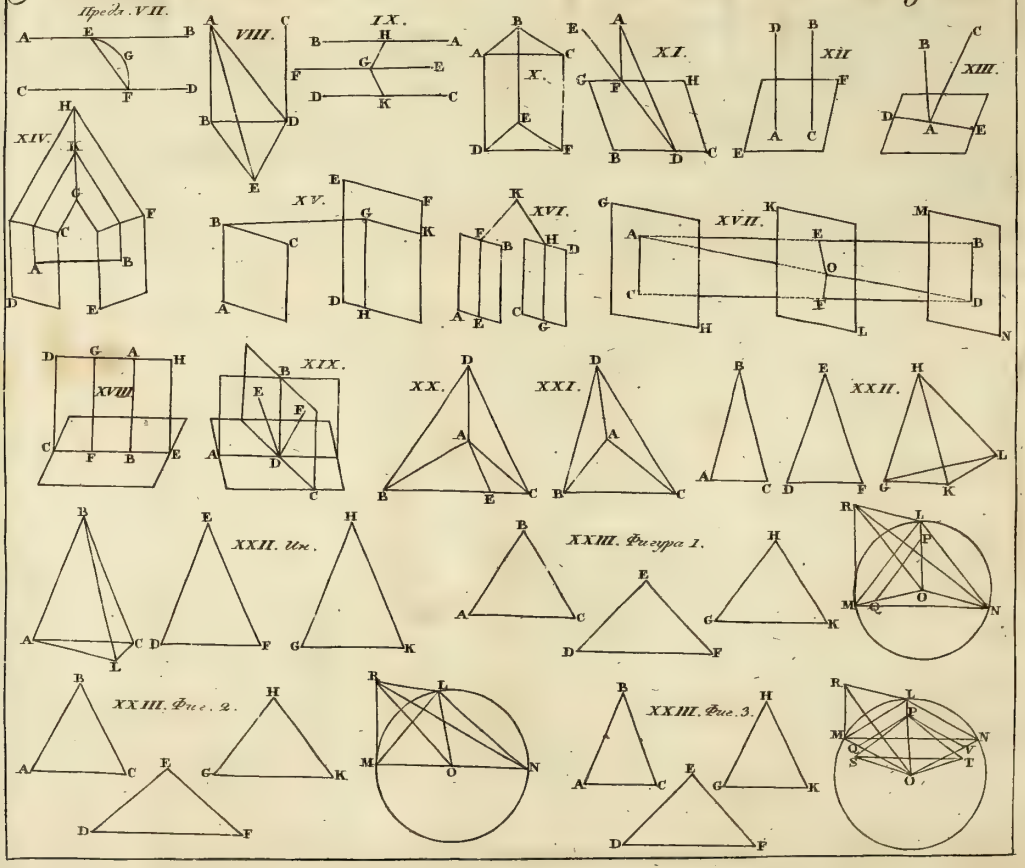
Эвклидовыхъ Началъ Книга шестая.



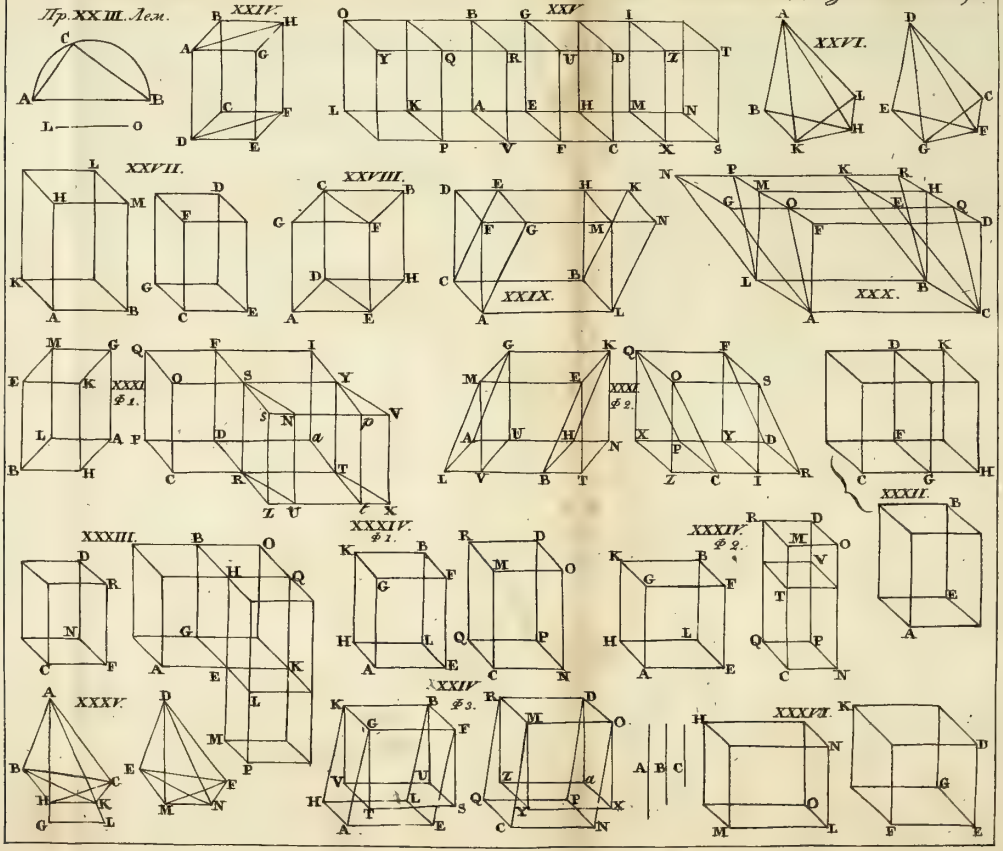
Эвклидовыхъ Началъ Книга одиннадцатая.



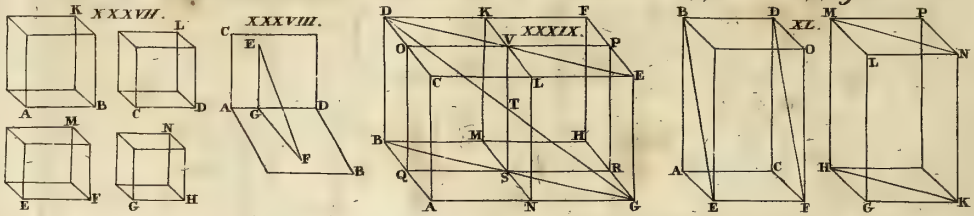
Эвклидовыхъ Началъ Книга одиннадцатая.



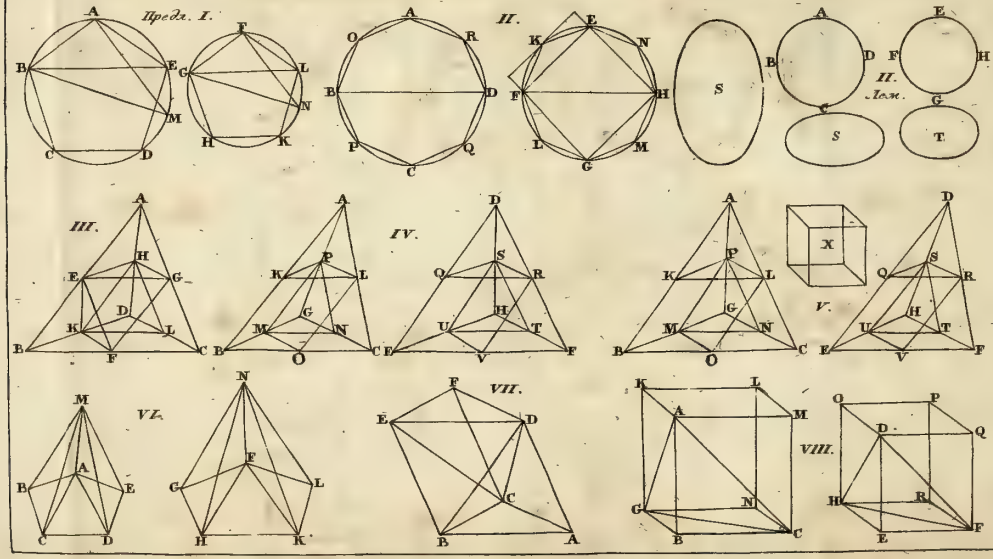
Эвклидовыхъ Началъ Книга одинадцатая.



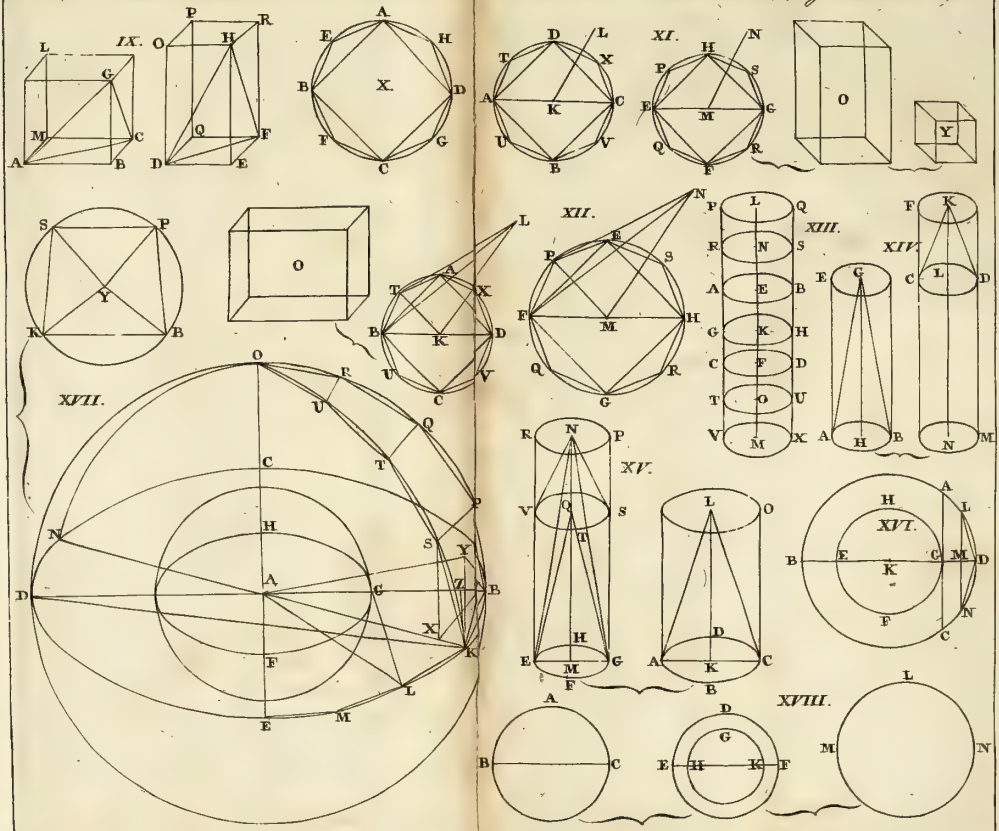
Эвклидовыхъ Началъ Книга одиннадцатая.



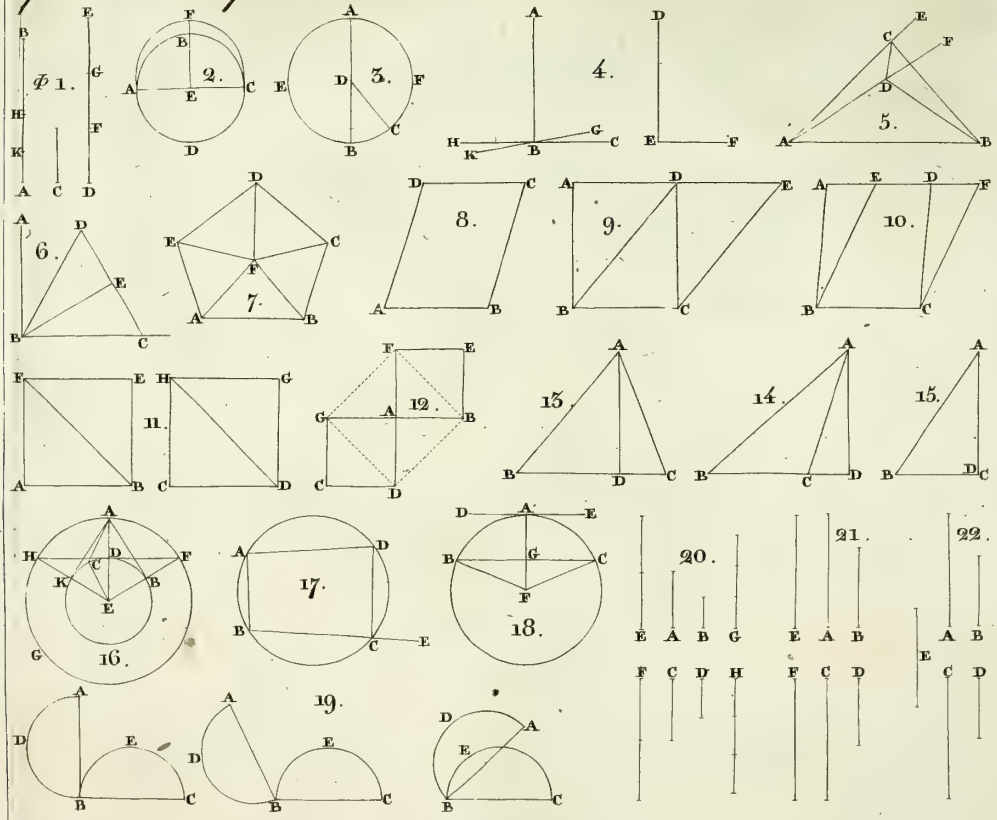
Эвклидовыхъ Началъ Книга двѣнадцатая.



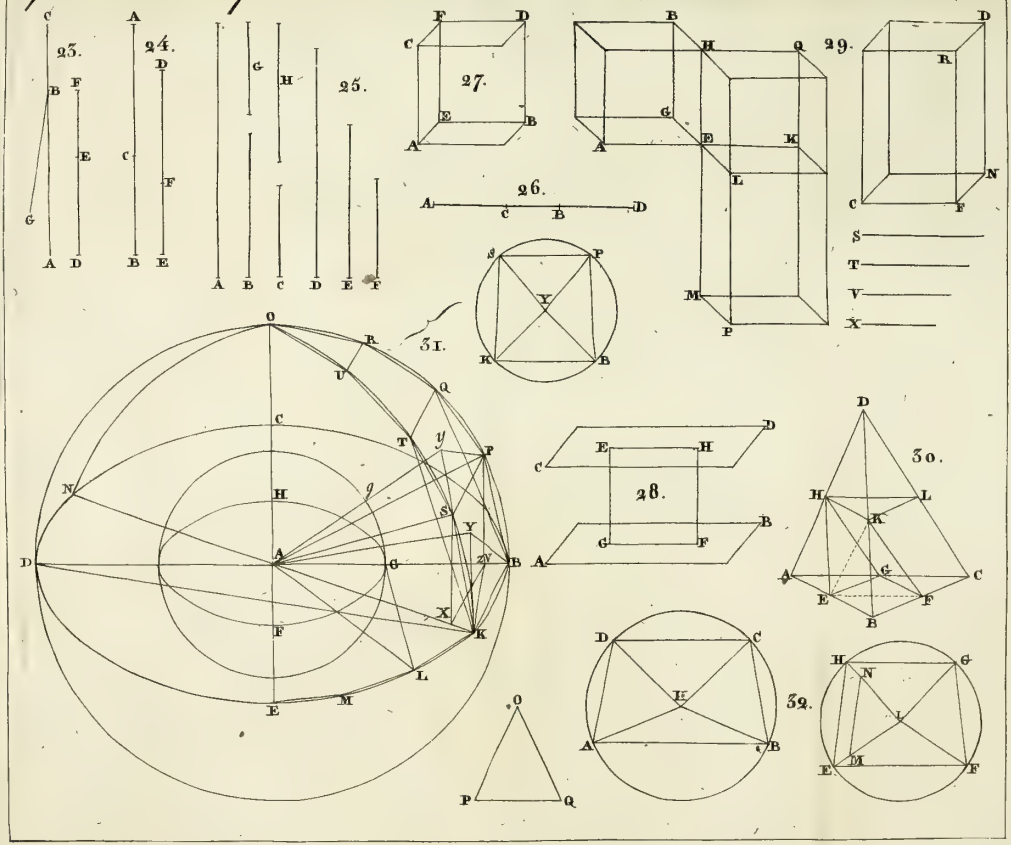
Эвклидовыхъ Началъ Книга двѣнадцатая.



Примѣч. и прибавленія къ Эвклидовымъ Началамъ



Примѣч. и прибавленія къ Эвклидовымъ Началамъ



Библиотека
при Московской
адресн. Мер. Об.
при Б. Дм.

19/V 1962

THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA
AT CHAPEL HILL

RARE BOOK COLLECTION

The André Savine Collection

QA31
.E87517
1819